Trabajo y energía

Del trabajo a la energía mecánica

Fuerzas, movimiento y transformaciones de energía

1 / FUERZA Y DESPLAZAMIENTO

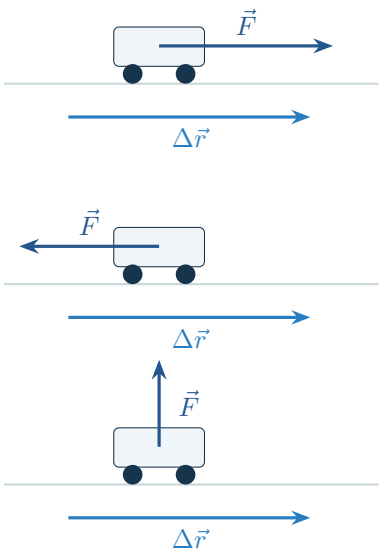
El trabajo es un producto escalar

Una fuerza realiza trabajo cuando tiene una componente en la dirección del desplazamiento del cuerpo. Para una **fuerza constante** $\vec{F}$ y un desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$,

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\,\Delta r \cos\theta}, \qquad \Delta r = |\Delta\vec{r}|.$$

El ángulo θ se mide entre los dos vectores. El **producto escalar** da un número con signo: mide la contribución de la fuerza a lo largo del desplazamiento considerado. Equivale a multiplicar la componente $F_{\parallel} = F\cos\theta$ por el módulo Δr del desplazamiento:

$$W = F_{\parallel}\,\Delta r, \qquad [W] = \mathrm{N\,m} = \mathrm{J} \quad \text{(julio)}.$$



A favor: $\theta = 0°$, $W = +F\,\Delta r > 0$

La fuerza contribuye positivamente al desplazamiento del carrito

En contra: $\theta = 180°$, $W = -F\,\Delta r < 0$

La fuerza contribuye de manera negativa al desplazamiento del carrito

Perpendicular: $\theta = 90°$, $W = 0$

La fuerza no influye en el desplazamiento del carrito

El carrito se desplaza en línea recta hacia la derecha. Azul vivo: desplazamiento. Azul oscuro: fuerza analizada. Se omiten las demás fuerzas para destacar el trabajo de esta fuerza. Las escalas de fuerza y desplazamiento son independientes.

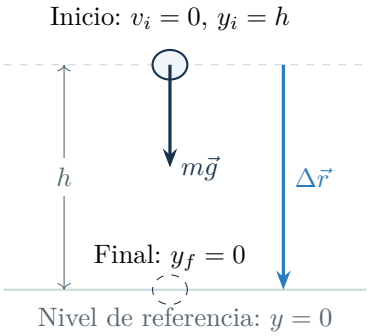
Solo la componente de la fuerza paralela al desplazamiento contribuye al trabajo. El trabajo puede ser positivo, negativo o nulo.

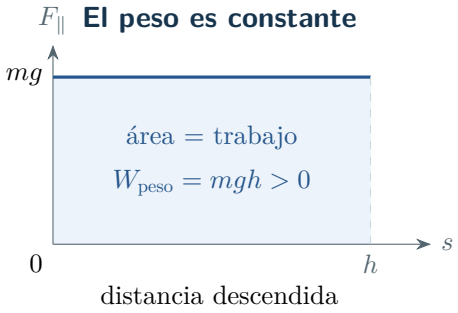
En el caso perpendicular, «no influye» se refiere a la contribución a lo largo del desplazamiento representado: esa fuerza no realiza trabajo. Una fuerza perpendicular a la velocidad sí puede cambiar la dirección del movimiento, como sucede en el movimiento circular.

2 / EL TRABAJO DEL PESO

Una pelota cae desde una altura h

Soltamos una pelota de masa m desde el reposo, a una altura h sobre un nivel de referencia. Se desprecia el rozamiento del aire y se considera uniforme el campo gravitatorio: el peso tiene módulo constante mg y apunta hacia abajo.





y es la altura sobre el nivel cero; s, la distancia descendida, positiva hacia abajo ($0 \le s \le h$). El estado final precede a cualquier choque. El trabajo calculado no depende de la velocidad inicial.

El peso y el desplazamiento tienen el mismo sentido: $\theta = 0°$. El área bajo la gráfica fuerza–desplazamiento es el trabajo: aquí es un **rectángulo de base h y altura mg**,

$$\boxed{W_{\text{peso}} = mg\,h\cos 0° = mgh > 0}.$$

Elevar la pelota es una manera de almacenar energía

Al elevar lentamente la pelota, una fuerza externa realiza trabajo contra el peso. Ese trabajo aumenta la **energía potencial gravitatoria del sistema Tierra–pelota**: se almacena energía en su configuración. Depende de la posición respecto a la Tierra, no de la pelota aislada. Con $E_{\text{p}} = 0$ en $y = 0$ y g uniforme,

$$\boxed{E_{\text{p}} = mgy} \qquad \Longrightarrow \qquad E_{\text{p},i} = mgh, \quad E_{\text{p},f} = 0.$$

Al soltarla, el peso realiza trabajo positivo: disminuye la energía potencial almacenada y esta puede transformarse en energía cinética. El nivel cero se elige por conveniencia: lo que cuenta en el balance es la **diferencia** de energías potenciales.

3 / FUERZAS CONSERVATIVAS

El trabajo procede de una disminución de energía potencial

La gravedad es una fuerza conservativa: su trabajo entre dos posiciones no depende del camino seguido. Una fuerza es **conservativa** cuando puede asociarse a una energía potencial de modo que

$$\boxed{W_{\text{cons}} = E_{\text{p},i} - E_{\text{p},f} = -\Delta E_{\text{p}}}, \qquad \Delta E_{\text{p}} = E_{\text{p},f} - E_{\text{p},i}.$$

Si una fuerza conservativa realiza trabajo positivo, la energía potencial disminuye. Si realiza trabajo negativo, la energía potencial aumenta.

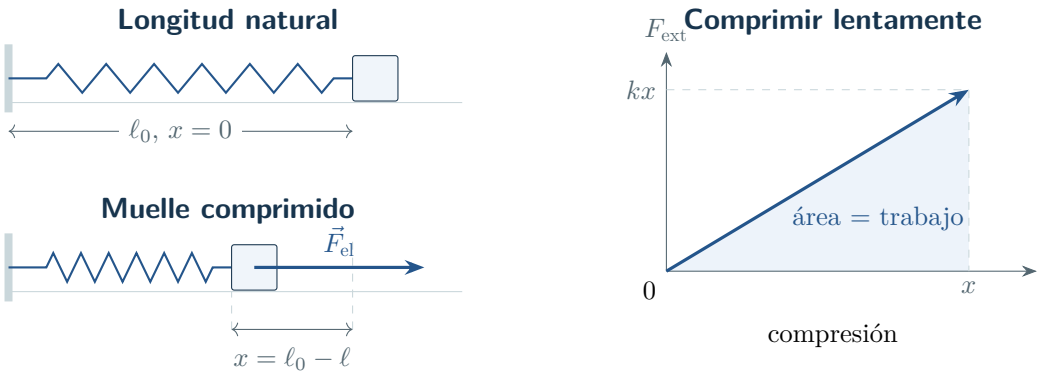
Para el peso, $W_{\text{peso}} = mg(y_i - y_f)$: al bajar es positivo; al subir, negativo. En un recorrido cerrado el trabajo de una fuerza conservativa es cero. La expresión $E_{\text{p}} = mgy$ supone g uniforme; la relación $W_{\text{cons}} = -\Delta E_{\text{p}}$ expresa la idea general.

4 / ALMACENAR ENERGÍA AL DEFORMAR

La energía potencial elástica de un muelle

Otra manera de almacenar energía es **comprimir un muelle**. El trabajo realizado para deformarlo aumenta su energía potencial elástica. Al liberarlo, el muelle puede realizar trabajo sobre un cuerpo y ponerlo en movimiento.

Consideramos un muelle ideal de masa despreciable. Llamamos $x \geq 0$ a la **compresión respecto de su longitud natural** ℓ_0: si su longitud es ℓ, entonces $x = \ell_0 - \ell$. La constante elástica k, en $\mathrm{N\,m^{-1}}$, mide su rigidez. En el intervalo donde se cumple la ley de Hooke, la fuerza elástica tiene módulo $F_{\mathrm{el}} = kx$ y tiende a recuperar la longitud natural.



A la izquierda se muestra la fuerza del muelle sobre el bloque al retirar la sujeción; se omiten las demás fuerzas. A la derecha se representa el módulo de la fuerza externa durante una compresión muy lenta. El muelle se mantiene en su intervalo elástico y se desprecia el rozamiento.

¿Por qué aparece el factor $\frac{1}{2}$?

La fuerza necesaria para comprimir el muelle **no es constante**: aumenta desde cero hasta kx. El trabajo es el área bajo la gráfica fuerza–compresión, un triángulo de base x y altura kx:

$$W_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{2}\, x\, (kx) = \frac{1}{2} k x^2.$$

Al comprimir muy lentamente, la energía cinética apenas cambia: el trabajo externo positivo aumenta la energía potencial elástica. En la caída, el trabajo positivo del peso disminuía la energía potencial gravitatoria. Con el cero en la posición natural,

$$\boxed{E_{\mathrm{p},el} = \frac{1}{2} k x^2}, \qquad E_{\mathrm{p},el} = 0 \text{ si } x = 0.$$

Liberar la energía almacenada

La fuerza elástica es conservativa. Igual que para el peso,

$$\boxed{W_{\mathrm{el}} = E_{\mathrm{p},el,i} - E_{\mathrm{p},el,f} = -\Delta E_{\mathrm{p},el}}.$$

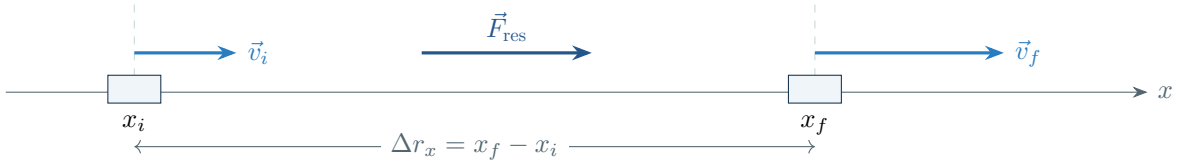
Si el muelle pasa de una compresión x_i a su longitud natural, realiza trabajo positivo $W_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2} k x_i^2$. Si es la única fuerza que realiza trabajo sobre el bloque, la disminución de energía potencial elástica se transforma en un aumento de su energía cinética.

Elevar la pelota y comprimir un muelle siguen la misma secuencia: trabajo externo $\longrightarrow$ energía potencial almacenada $\longrightarrow$ energía cinética al liberar el sistema.

5 / DEL TRABAJO AL CAMBIO DE RAPIDEZ

El teorema del trabajo y la energía cinética

El trabajo describe cómo cambia el movimiento. Consideremos una partícula de **masa constante**, en un sistema de referencia inercial. Comenzamos por un tramo rectilíneo con fuerza resultante constante.



La figura ilustra una resultante a favor del movimiento. Usar componentes con signo permite también describir una disminución de rapidez.

1. Expresar el trabajo mediante la segunda ley

En el eje x, $F_{\text{res},x} = ma_x$. Por tanto, el trabajo de la resultante es

$$W_{\text{resultante}} = F_{\text{res},x}\,\Delta r_x = ma_x\Delta r_x.$$

2. Relacionar desplazamiento y velocidades

Con a_x constante, la ecuación cinemática da

$$v_{x,f}^2 - v_{x,i}^2 = 2a_x\Delta r_x \quad\Longrightarrow\quad a_x\Delta r_x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2}.$$

v_i y v_f son las rapideces: en una recta, sus cuadrados coinciden con los cuadrados de las componentes de velocidad.

3. Sustituir e identificar la energía cinética

$$W_{\text{resultante}} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2.$$

La magnitud $\boxed{E_{\text{c}} = \frac{1}{2}mv^2}$ es la **energía cinética**, asociada al movimiento. Por tanto,

$$\boxed{W_{\text{resultante}} = \Delta E_{\text{c}} = E_{\text{c},f} - E_{\text{c},i}}.$$

Si la fuerza o la dirección cambian, se suman los trabajos en tramos cada vez más pequeños. El teorema sigue siendo válido para una partícula de masa constante.

El trabajo neto positivo aumenta la energía cinética y la rapidez; el negativo las reduce. Si es cero, la energía cinética final coincide con la inicial.

Los trabajos de todas las fuerzas se suman: $W_{\text{resultante}} = \sum_j W_j$. El cambio total de energía cinética corresponde a esa suma. Una fuerza puede hacer trabajo positivo mientras otra hace trabajo negativo.

La misma energía expresada mediante p

En el régimen **no relativista**, la cantidad de movimiento es $\vec{p} = m\vec{v}$. Su módulo es $p = mv$; al sustituir $v = p/m$,

$$\boxed{E_{\text{c}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}}.$$

6 / CUANDO SOLO TRABAJAN FUERZAS CONSERVATIVAS

La energía mecánica se conserva

Si las únicas fuerzas que realizan trabajo son conservativas, el mismo trabajo puede expresarse a partir de la energía cinética o de la energía potencial:

$$W_{\text{resultante}} = \Delta E_{\text{c}}, \qquad W_{\text{resultante}} = W_{\text{cons}} = -\Delta E_{\text{p}}.$$

Al igualar ambas expresiones y reagrupar los términos,

$$E_{\text{c},f} - E_{\text{c},i} = E_{\text{p},i} - E_{\text{p},f} \quad \Longrightarrow \quad E_{\text{c},i} + E_{\text{p},i} = E_{\text{c},f} + E_{\text{p},f}.$$

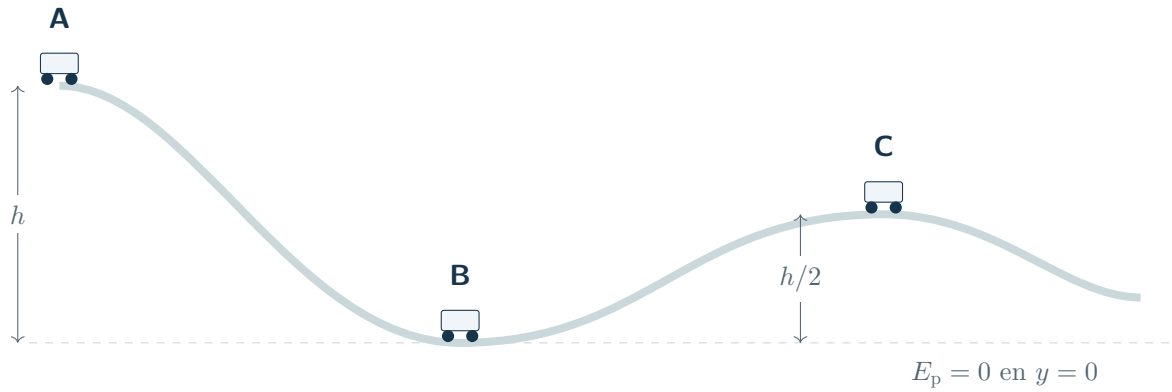
Definimos la **energía mecánica** como la suma de la cinética y de las energías potenciales pertinentes. E_{p} puede incluir la gravitatoria, la elástica o ambas; si intervienen las dos, $E_{\text{p}} = mgy + \frac{1}{2}kx^2$:

$$\boxed{E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E_{\text{m},i} = E_{\text{m},f}}.$$

La energía cinética y la potencial pueden cambiar, pero su suma permanece constante cuando solo realizan trabajo fuerzas conservativas.

Una montaña rusa ideal: energía que cambia de forma

Modelamos el carrito como una partícula, sin rozamiento ni resistencia del aire. La pista es fija y se mantiene el contacto. La normal es perpendicular al desplazamiento y no realiza trabajo; el peso es la única fuerza que lo realiza.

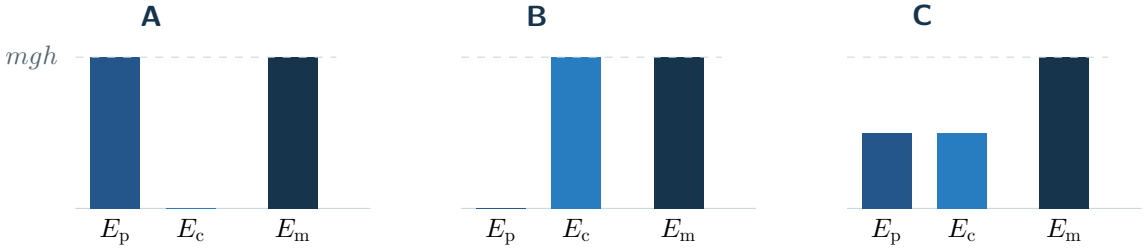


A. En reposo, a altura h
$E_{\text{p}} = mgh$, $E_{\text{c}} = 0$

B. En el punto más bajo
$E_{\text{p}} = 0$, $E_{\text{c}} = mgh$

C. A media altura
$E_{\text{p}} = \frac{1}{2}mgh$, $E_{\text{c}} = \frac{1}{2}mgh$

La figura representa posiciones sucesivas del mismo carrito. La energía mecánica vale mgh en todo el recorrido. Se toma como altura del carrito la de la línea de la pista; su tamaño se exagera para verlo.

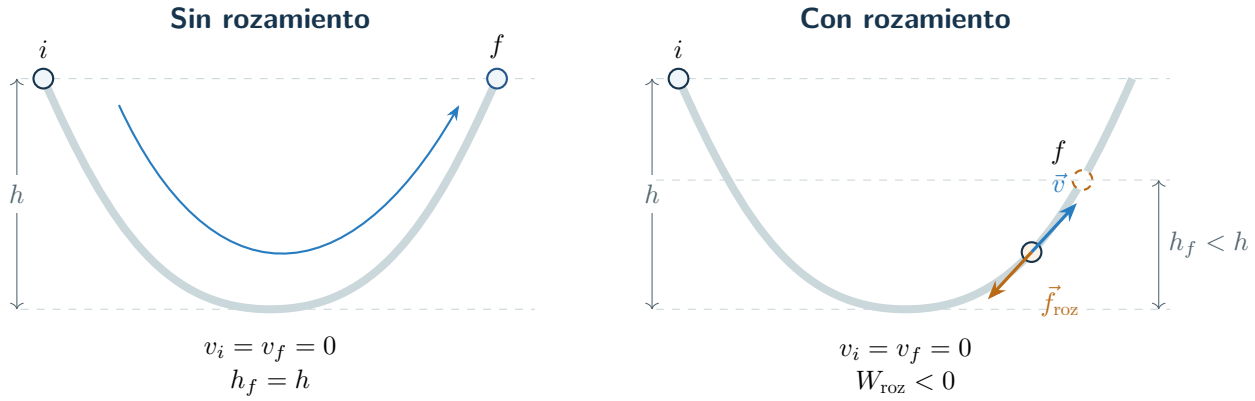


Barras con una misma escala de energía. Al bajar, disminuye E_{p} y aumenta E_{c}; al subir sucede lo contrario. La barra de E_{m} mantiene la misma altura.

7 / UNA PISTA EN FORMA DE U

Del modelo ideal al rozamiento real

Una bola se suelta desde el reposo en un extremo de una pista fija. La tratamos como una **partícula que desliza**: solo consideramos la energía cinética de traslación. La normal es perpendicular al desplazamiento y no realiza trabajo.



f indica dónde se detiene momentáneamente la bola en el primer ascenso. En el caso real, el círculo discontinuo marca ese punto final; la bola rellena muestra un instante anterior del ascenso. Desde su centro parten la velocidad (azul) y el rozamiento (ámbar), tangentes a la pista y de sentidos opuestos. Los tamaños y las flechas son esquemáticos.

Modelo ideal. El peso es la única fuerza que realiza trabajo. Como la bola comienza y termina momentáneamente en reposo, $mgh = mgh_f$: alcanza la **misma altura inicial** al otro lado.

Caso real. El rozamiento se opone al deslizamiento y realiza trabajo negativo. La energía mecánica disminuye y, en el primer ascenso al otro lado, la bola alcanza una **altura menor**.

Un balance que incluye el trabajo no conservativo

El teorema del trabajo y la energía cinética se aplica a todas las fuerzas:

$$\Delta E_{\text{c}} = W_{\text{cons}} + W_{\text{no conservativas}} = -\Delta E_{\text{p}} + W_{\text{no conservativas}}.$$

Por tanto, $\Delta E_{\text{c}} + \Delta E_{\text{p}} = \Delta E_{\text{m}} = W_{\text{no conservativas}}$, y obtenemos

$$\boxed{E_{\text{m},i} + W_{\text{no conservativas}} = E_{\text{m},f}}.$$

Para la pista con rozamiento, entre los dos puntos de reposo,

$$mgh + W_{\text{roz}} = mgh_f, \qquad W_{\text{roz}} < 0 \quad \Longrightarrow \quad h_f < h.$$

El rozamiento reduce la energía mecánica, pero no destruye energía: parte de ella se transforma en energía interna de la bola y de la pista.

Si el sistema bola–pista–Tierra no intercambia energía con el exterior y el rozamiento es la única transformación adicional, $\Delta E_{\text{interna}} = -W_{\text{roz}} > 0$:

$$\boxed{\Delta E_{\text{m}} + \Delta E_{\text{interna}} = 0}.$$

La ecuación con $W_{\text{no conservativas}}$ es un **balance de energía mecánica**. Al incluir la energía interna, el balance expresa la **conservación de la energía total** del sistema.

8 / EL TIEMPO TAMBIÉN IMPORTA

La potencia: cuánta energía se transfiere por segundo

Realizar el mismo trabajo puede requerir tiempos distintos. La **potencia** mide el ritmo al que se realiza trabajo o se transfiere energía. Durante un intervalo Δt, la potencia media es

$$\boxed{P_{\text{media}} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E_{\text{transferida}}}{\Delta t}}.$$

ΔW es el trabajo realizado en ese intervalo. La unidad de potencia es el **vatio** (watt), cuyo símbolo es W:

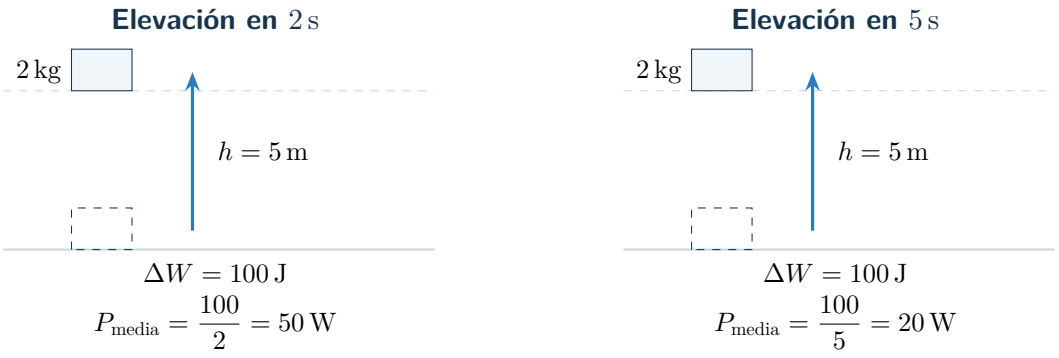
$$1\,\text{W} = 1\,\text{J}\,\text{s}^{-1}.$$

En una ecuación, W en cursiva representa trabajo; W junto a un valor numérico indica la unidad de potencia.

La misma carga, la misma altura y dos tiempos

Elevamos una carga de 2 kg una altura de 5 m. Empieza y termina en reposo y despreciamos las resistencias. Para este ejemplo tomamos $g = 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$: el trabajo de la fuerza que la eleva es, en ambos casos,

$$\Delta W = mgh = 2 \cdot 10 \cdot 5 = 100\,\text{J}.$$



El trabajo y el aumento de energía potencial son iguales en las dos elevaciones. Hacerlo en menos tiempo requiere una potencia media mayor.

Potencia mecánica de una fuerza en un instante

En un intervalo muy breve, la fuerza y la velocidad pueden considerarse casi constantes. Si θ es el ángulo entre ellas,

$$P \simeq \frac{F\,\Delta r\cos\theta}{\Delta t} \simeq Fv\cos\theta.$$

Al considerar los valores instantáneos, la relación es

$$\boxed{P = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv\cos\theta}.$$

Si fuerza y velocidad son paralelas y del mismo sentido, $\boxed{P = Fv}$. Si tienen sentidos contrarios, la potencia de esa fuerza es negativa; si son perpendiculares, es cero.

Esta es la potencia **asociada a la fuerza** $\vec{F}$. Si se usa la fuerza resultante, se obtiene la potencia neta: el ritmo al que cambia la energía cinética. La potencia describe la rapidez de una transferencia, y se combina con el balance de energía correspondiente.