Circulación, potencial y superficies equipotenciales

De la idea de recorrido al caso del campo magnético

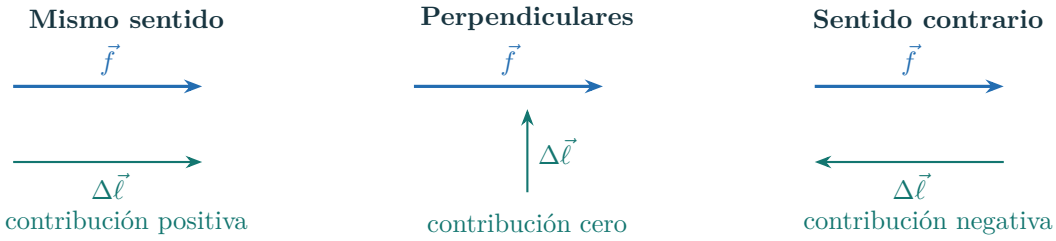
Apuntes conceptuales. Se consideran campos gravitatorios newtonianos estáticos, campos electrostáticos y campos magnéticos de corrientes estacionarias en el vacío.

1 / IDEA CONCEPTUAL

¿Cuánto acompaña el campo a un recorrido?

Imagina un campo representado por flechas y elige un camino que quieras recorrer. En cada pequeño tramo puedes comparar dos direcciones: **la del campo** y **la del avance por el camino**.

Si el campo apunta en el mismo sentido que tu avance, su contribución al recorrido es positiva. Si apunta en sentido contrario, es negativa. Si apunta perpendicularmente, no contribuye. La circulación acumula todas esas contribuciones, teniendo en cuenta también la longitud de cada tramo.



La circulación mide la acumulación de la componente del campo que es tangente al recorrido. No suma simplemente los módulos de sus flechas.

El nombre puede sugerir que algo tiene que estar girando o fluyendo. **No es necesario**: estamos calculando una propiedad del campo y de un camino elegido. Podemos hacerlo sin mover ninguna partícula. Tampoco hay que confundir el camino con una línea de campo ni con una trayectoria real.

En un tramo pequeño, la contribución se escribe como un producto escalar:

$$\vec{f}\cdot\Delta\vec{\ell} = f\,\Delta\ell\cos\theta.$$

El ángulo θ compara el campo con el sentido de avance. El coseno recoge exactamente los tres casos del dibujo. Si dividimos el camino en muchos tramos y sumamos, obtenemos una integral de línea. Cuando el camino se cierra y regresamos al punto de partida, hablamos de **circulación en un contorno cerrado**.

2 / DAR UNA VUELTA COMPLETA

La circulación en electricidad y gravedad

Para un contorno cerrado C, la suma anterior se expresa así:

$$\boxed{\Gamma_{\vec{f}}(C) = \oint_C \vec{f} \cdot d\vec{\ell}.}$$

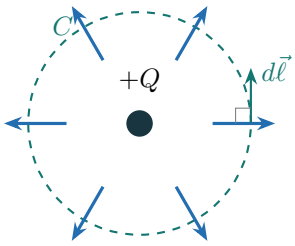
El símbolo de integral con un círculo indica que el recorrido termina donde empieza. $d\vec{\ell}$ es un avance infinitesimal, **tangente al camino y orientado en el sentido elegido**. Invertir el sentido del recorrido invierte el signo de la circulación.

En un campo electrostático y en un campo gravitatorio estático, la circulación en cualquier contorno cerrado admisible es cero:

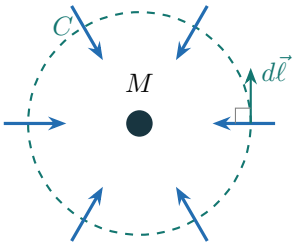
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0, \qquad \oint_C \vec{g} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

La palabra *admisible* recuerda que el campo debe estar definido a lo largo del recorrido: no pasamos por la posición singular de una fuente puntual.

Ejemplo: Alrededor de una carga o una masa puntual, elegimos una circunferencia centrada en la fuente. El campo es radial y cada avance por la circunferencia es tangencial. Son perpendiculares: cada contribución es cero, aunque el campo no sea nulo.



Campo eléctrico de una carga positiva



Campo gravitatorio de una masa

La propiedad no se limita a circunferencias ni depende de que el campo sea radial. En un camino irregular pueden aparecer contribuciones positivas y negativas; **al completar la vuelta se compensan**. El potencial permitirá entender por qué.

> **Circulación cero no significa campo cero. Significa que, después de sumar las contribuciones con su signo, el balance de una vuelta es cero.**

Circulación y flujo son preguntas distintas. La circulación sigue una *curva* y suma componentes tangenciales. El flujo atraviesa una *superficie* y suma componentes normales. La misma carga que da circulación eléctrica cero puede producir flujo eléctrico no nulo a través de una superficie que la encierra.

3 / UN VALOR PARA CADA PUNTO

El potencial organiza las contribuciones

Imagina un mapa de alturas. Entre dos lugares, el balance de subidas y bajadas depende de sus alturas inicial y final, no de los rodeos que hayas dado. Una vuelta completa termina a la misma altura: el cambio neto es cero.

El potencial desempeña un papel parecido. **Es una magnitud escalar**: asigna un número a cada punto. En los campos considerados podemos relacionar la integral del campo entre dos puntos A y B con los potenciales de los extremos:

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = V_{\mathrm{E}}(A) - V_{\mathrm{E}}(B), \qquad \int_A^B \vec{g}\cdot d\vec{\ell} = V_{\mathrm{G}}(A) - V_{\mathrm{G}}(B).$$

Aquí el recorrido es abierto. La integral mide el **descenso neto de potencial**, con signo. No hace falta que el potencial disminuya en todos los tramos: puede bajar y subir durante el recorrido.

Si B coincide con A, la diferencia es cero. Así se entiende la circulación nula en una vuelta. Si dos caminos unen los mismos extremos, sus integrales dan el mismo resultado: **la integral es independiente del camino**.

¿Qué significa físicamente ese número?

- V_{E} es energía potencial eléctrica por unidad de carga. Se mide en J/C, es decir, en voltios.
- V_{G} es energía potencial gravitatoria por unidad de masa. Se mide en J/kg.

Para una carga q y una masa m, respectivamente:

$$E_{\mathrm{p}} = qV_{\mathrm{E}}, \qquad E_{\mathrm{p}} = mV_{\mathrm{G}}.$$

Al multiplicar la integral del campo por q o por m, obtenemos el trabajo de la fuerza correspondiente:

$$W_{\mathrm{E}} = q\,[V_{\mathrm{E}}(A) - V_{\mathrm{E}}(B)], \qquad W_{\mathrm{G}} = m\,[V_{\mathrm{G}}(A) - V_{\mathrm{G}}(B)].$$

En ambos casos, el trabajo del campo es $W = -\Delta E_{\mathrm{p}}$.

Un ejemplo eléctrico. Si $V_{\mathrm{E}}(A) = 12\,\mathrm{V}$ y $V_{\mathrm{E}}(B) = 5\,\mathrm{V}$, la integral de $\vec{E}$ entre esos puntos vale $7\,\mathrm{V}$. Sobre una carga de $+2\,\mu\mathrm{C}$, el campo hace un trabajo de $14\,\mu\mathrm{J}$. Sobre una carga de $-2\,\mu\mathrm{C}$, el trabajo para ese mismo desplazamiento es $-14\,\mu\mathrm{J}$. **El campo y los potenciales son los mismos; el signo de la carga cambia el trabajo.**

> **El potencial es como una altura, pero la energía potencial incluye al cuerpo de prueba. Una carga negativa tiene menor energía potencial cuando aumenta V_{E}, porque $E_{\mathrm{p}} = qV_{\mathrm{E}}$.**

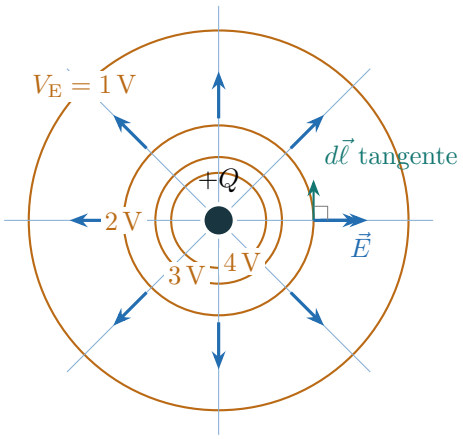
El cero del potencial puede elegirse por convenio. Cambiarlo no altera las diferencias de potencial, los campos ni el trabajo. Para fuentes puntuales aisladas se suele elegir $V(\infty) = 0$.

4 / EL MAPA DE ALTURAS

Qué muestran las superficies equipotenciales

Una superficie equipotencial reúne puntos con el mismo valor de V_{E} o de V_{G}. Es el equivalente a una curva de nivel de un mapa topográfico. En un dibujo plano solemos ver **líneas equipotenciales**: son cortes o representaciones bidimensionales de esas superficies.

Moverse por una misma equipotencial no cambia el potencial. Por tanto, la componente tangencial de $\vec{E}$ o de $\vec{g}$ debe ser cero. **Donde el campo no es nulo, sus líneas cruzan perpendicularmente las equipotenciales.**



Iguales incrementos de potencial
Cada equipotencial difiere de la siguiente en 1 V. Cerca de la carga están más juntas: el potencial cambia más deprisa con la distancia.

Dos direcciones distintas
El desplazamiento tangente conserva el potencial. El campo señala la dirección perpendicular en la que el potencial disminuye más deprisa.

Superficies equipotenciales de una carga puntual positiva, con distancias en escala de dibujo. En tres dimensiones serían esferas concéntricas. Las superficies gravitatorias de una masa puntual también son esféricas, pero su potencial aumenta al alejarse de la masa.

La relación matemática se resume diciendo que el campo es el **gradiente negativo del potencial**. El gradiente describe la dirección y la rapidez con que cambia una magnitud escalar:

$$\vec{E} = -\nabla V_{\mathrm{E}}, \qquad \vec{g} = -\nabla V_{\mathrm{G}}.$$

En los casos de simetría esférica, el potencial depende solo de la distancia r al centro. La expresión se simplifica usando el vector unitario $\hat{r}$, que apunta radialmente hacia fuera:

$$\vec{E} = -\frac{dV_{\mathrm{E}}}{dr}\,\hat{r}, \qquad \vec{g} = -\frac{dV_{\mathrm{G}}}{dr}\,\hat{r}.$$

No hace falta dominar este operador para leer el mapa. Si equipotenciales sucesivas tienen **la misma diferencia de potencial**, cuanto menor sea su separación perpendicular Δn, mayor será el campo. Localmente:

$$E \approx \frac{|\Delta V_{\mathrm{E}}|}{\Delta n}, \qquad g \approx \frac{|\Delta V_{\mathrm{G}}|}{\Delta n}.$$

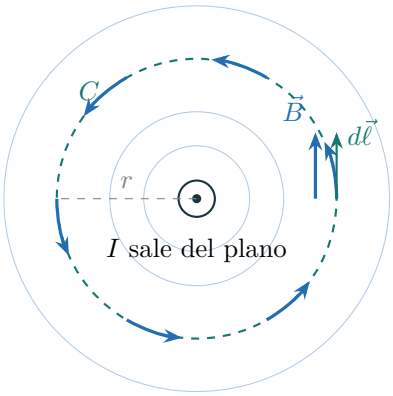
Superficies equipotenciales más juntas indican un campo más intenso solamente si se comparan iguales incrementos de potencial. Una equipotencial no es una región de campo necesariamente nulo.

5 / EL CAMPO QUE RODEA LA CORRIENTE

La circulación magnética puede ser no nula

Consideremos un hilo rectilíneo largo, idealizado como infinito, por el que circula una corriente estacionaria I. Sus líneas de campo magnético son circunferencias centradas en el hilo. Elegimos un contorno C que coincida con una de esas circunferencias.

Ahora la situación es diferente a la del campo radial: $\vec{B}$ **y** $d\vec{\ell}$ **son tangentes al mismo círculo**. Si recorremos el contorno en el sentido del campo, todas las contribuciones son positivas. No hay tramos negativos que las compensen.



Una vuelta en sentido antihorario
La regla de la mano derecha fija el sentido de $\vec{B}$. En cada tramo, el producto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ es positivo.

El círculo elegido es un camino de integración. No representa la trayectoria de una carga: sobre una carga, la fuerza magnética es perpendicular a su velocidad.

Por simetría, el módulo de B es constante en este contorno. Sumando todas las contribuciones obtenemos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B\,(2\pi r).$$

Como para este hilo $B = \mu_0 I/(2\pi r)$, si I se toma positivo saliendo del plano:

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \neq 0.}$$

Es un caso de la **ley de Ampère**: en magnetostática, la circulación de $\vec{B}$ alrededor de un contorno está relacionada con la corriente que atraviesa una superficie delimitada por ese contorno. Su signo depende de la orientación elegida.

> **La circulación magnética no se anula en todos los contornos. Un solo contorno con circulación no nula basta para descartar un potencial escalar global que genere ese campo en toda la región considerada.**

Esta integral se mide en T m. **No es trabajo ni energía por unidad de carga**: no estamos integrando la fuerza de Lorentz.

6 / LA CONTRADICCIÓN DE LA VUELTA

Por qué falla un potencial escalar global para B

Supongamos que pudiéramos asignar a cada punto un único número V_{B} y que el campo magnético indicara su descenso, de manera análoga a $\vec{E} = -\nabla V_{\mathrm{E}}$ o $\vec{g} = -\nabla V_{\mathrm{G}}$.

Volvamos al contorno alrededor del hilo. Recorriéndolo en el sentido de $\vec{B}$, avanzaríamos hacia potenciales menores en cada pequeño tramo. Toda la vuelta sería un descenso. Sin embargo, al terminar regresaríamos al mismo punto, al que debe corresponder el mismo valor de potencial que al principio.

> **No se puede volver al mismo lugar después de haber bajado continuamente una altura que depende solo de la posición. Un potencial escalar univaluado no puede describir ese campo alrededor del hilo.**

La versión matemática apenas añade una línea. Si existiera un potencial escalar global con

$$\vec{B} = -\nabla V_{\mathrm{B}},$$

su integral en una vuelta cerrada tendría que ser

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = V_{\mathrm{B}}(A) - V_{\mathrm{B}}(A) = 0.$$

Pero la ley de Ampère da $\mu_0 I \neq 0$. Las dos afirmaciones son incompatibles. **No existe ese potencial escalar global en una región que permita rodear la corriente.**

Por qué importan las palabras "global" y "en general". No es correcto concluir que ningún campo magnético pueda expresarse nunca mediante un potencial escalar. En una región magnetostática sin corrientes y simplemente conexa —sin un agujero que permita enlazar una corriente excluida— puede definirse uno.

Por ejemplo, un campo uniforme $\vec{B} = B_0\hat{x}$ puede escribirse localmente como $-\nabla V_{\mathrm{B}}$ con $V_{\mathrm{B}} = -B_0 x$. Ese escalar tiene unidades de T m: no es un potencial eléctrico ni proporciona por sí solo la fuerza de Lorentz como una pendiente de energía potencial de posición.

El hilo muestra además un matiz importante: **la corriente puede estar fuera de los puntos del recorrido y aun así quedar enlazada por él**. En todo el espacio que rodea al hilo no podemos asignar ese potencial de manera global y univaluada. Para visualizar la dificultad no hace falta estudiar topología: basta con intentar dar la vuelta completa al hilo.

¿Qué se usa en la descripción general? Un *potencial vector* $\vec{A}$, relacionado con el campo por

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Este operador, llamado rotacional, no necesita desarrollarse aquí. Lo relevante es que la descripción general requiere un vector, y no el mismo tipo de mapa escalar que usamos con V_{E} y V_{G}.

7 / NO CONFUNDIR DOS INTEGRALES

Circulación de B y trabajo magnético

Que la circulación de $\vec{B}$ sea no nula **no significa que la fuerza magnética haga trabajo sobre una carga puntual**. El trabajo integra la *fuerza*, no el campo $\vec{B}$ directamente.

La fuerza magnética sobre una carga puntual es

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\,\vec{v} \times \vec{B}.$$

Es perpendicular a $\vec{v}$. En la trayectoria real de la carga, $d\vec{\ell} = \vec{v}\,dt$, de modo que el producto escalar de la fuerza con el avance es cero:

$$\vec{F}_{\mathrm{m}} \cdot d\vec{\ell} = 0, \qquad W_{\mathrm{m}} = 0.$$

La fuerza magnética puede cambiar la **dirección** de la velocidad y curvar la trayectoria; por sí sola no cambia su módulo ni E_{c}. Que exista aceleración no exige que cambie la rapidez: la aceleración puede ser perpendicular a la velocidad.

En electricidad y gravedad, multiplicar el campo por q o m da la fuerza. En magnetismo hay un producto vectorial con la velocidad. Por eso no podemos trasladar directamente a $\vec{B}$ la interpretación de V_{E} como energía potencial por unidad de carga.

Dos precisiones que evitan conclusiones excesivas. La ausencia de un potencial escalar global para $\vec{B}$ no implica ausencia de energía magnética. Un dipolo magnético en un campo externo puede tener energía potencial $E_{\mathrm{p}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. La afirmación de trabajo magnético nulo anterior se refiere a la fuerza de Lorentz sobre una carga puntual.

Además, la circulación eléctrica nula de estos apuntes corresponde a la **electrostática**. Cuando cambia el flujo magnético, puede aparecer un campo eléctrico inducido con circulación no nula. Entonces no basta un potencial eléctrico escalar para describir todo ese campo.

RESUMEN

Una explicación breve para recordar

- La circulación suma la componente del campo tangente a un recorrido, con su signo.
- En electricidad estática y gravedad estática, el balance de una vuelta es cero. El potencial permite obtener la integral a partir de sus valores en los extremos.
- Las equipotenciales reúnen puntos con igual potencial; los campos las cruzan perpendicularmente donde no son nulos. Iguales saltos de potencial en menor distancia indican mayor campo.
- Alrededor de un hilo con corriente, la circulación de $\vec{B}$ no es cero. Seguir su sentido no puede representar un descenso de un potencial escalar global durante toda una vuelta.

Lecturas de apoyo. Lecciones de Física de Feynman: vol. II, cap. 3, integral de línea y circulación; cap. 4, potencial electrostático; cap. 13, magnetostática y ley de Ampère; cap. 14, potencial vector. Vol. I, cap. 13, trabajo y energía potencial. Explicación y esquemas elaborados para estos apuntes.