Movimiento circular

Velocidad, aceleración y fuerzas

De la línea recta al cambio continuo de dirección

1 / EMPEZAR EN UNA RECTA

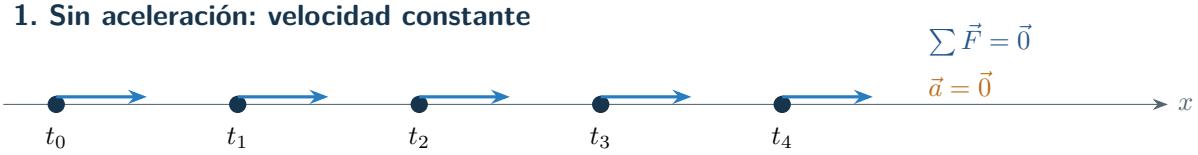
La aceleración indica cómo cambia la velocidad

Para una partícula de masa constante, en un sistema de referencia inercial,

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}.$$

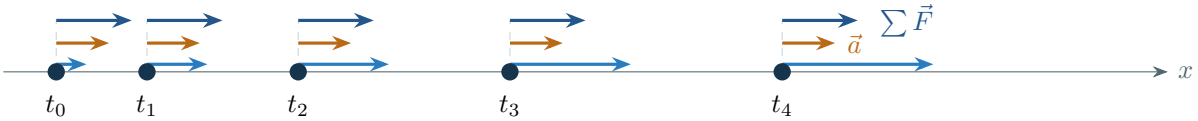
La **fuerza resultante** determina la aceleración; la aceleración determina el cambio de velocidad. En los tres casos siguientes el cuerpo se mueve hacia la derecha y las marcas se toman cada mismo intervalo Δt.

1. Sin aceleración: velocidad constante



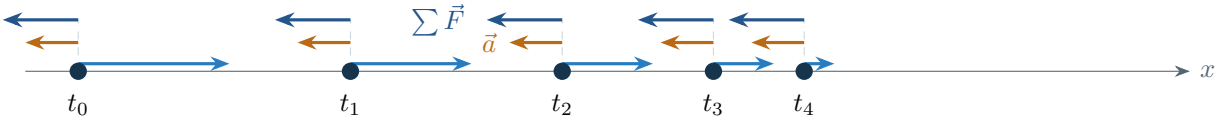
$v_x > 0$ constante Δx iguales.

2. Aceleración en el sentido de la velocidad: crece la rapidez



$\sum F_x > 0$ $a_x > 0$ v_x crece: las posiciones se separan cada vez más.

3. Aceleración opuesta a la velocidad: disminuye la rapidez



$\sum F_x < 0$ $a_x < 0$ v_x disminuye: las posiciones están cada vez más próximas.

Azul vivo: velocidad. Ámbar: aceleración. Azul oscuro: fuerza resultante. Los vectores de cada partícula se separan ligeramente en altura para distinguirlos; son colineales. En los casos 2 y 3, la fuerza resultante y la aceleración son constantes. Las escalas de las tres magnitudes son independientes.

En una recta, mientras no cambie el sentido del movimiento, la aceleración a favor de la velocidad aumenta la rapidez y en contra la reduce.

El caso 3 se representa antes de detenerse. Si la misma fuerza sigue actuando después, el cuerpo invierte su sentido y aumenta su rapidez hacia la izquierda. Fuerza resultante nula puede significar que varias fuerzas se equilibran.

2 / MÓDULO Y DIRECCIÓN

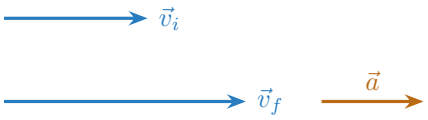
Dos maneras de cambiar el mismo vector

En cada instante con $v > 0$ podemos escribir

$$\boxed{\vec{v} = v\,\vec{u}_v}, \qquad |\vec{u}_v| = 1.$$

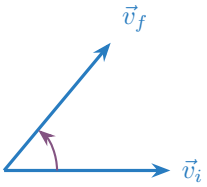
v expresa **cuánto vale la rapidez**; el vector unitario $\vec{u}_v$ expresa **hacia dónde se mueve el cuerpo**. Una variación de cualquiera de los dos factores cambia la velocidad.

Cambiar el módulo



v cambia; $\vec{u}_v$ se mantiene.
La aceleración es tangencial.

Cambiar la dirección



v se mantiene; $\vec{u}_v$ cambia.
En un círculo, es radial.

Desarrollo de la derivada: regla del producto

Los dos factores dependen del tiempo, por lo que

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[v\,\vec{u}_v\right]$$
$$= \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_v + v\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_v}{\mathrm{d}t}}.$$

En una trayectoria circular, los dos términos corresponden a las componentes tangencial y radial:

Primer término: cambia la rapidez	**Segundo término: cambia la dirección**
$\vec{a}_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_v$	$\vec{a}_r = v\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_v}{\mathrm{d}t}$
Es paralelo u opuesto a la velocidad.	Es perpendicular a la velocidad.
Su signo indica aumento o disminución de rapidez.	Indica hacia dónde se curva la trayectoria.

¿Por qué los dos términos son perpendiculares?

El vector $\vec{u}_v$ mantiene su módulo unidad y solo puede cambiar de dirección. Por eso, $\mathrm{d}\vec{u}_v/\mathrm{d}t$ no apunta a lo largo de $\vec{u}_v$: **el cambio de un vector unitario es perpendicular al propio vector**.

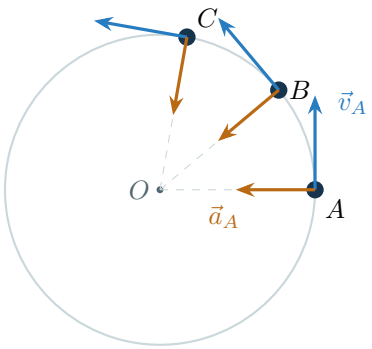
La aceleración tangencial cambia la rapidez. En el movimiento circular, la aceleración radial cambia la dirección. Pueden actuar a la vez.

En el reposo, la dirección de la velocidad no está definida. La ecuación vectorial $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ sigue siendo válida; la descomposición mediante $\vec{u}_v$ se usa en los tramos donde $v > 0$.

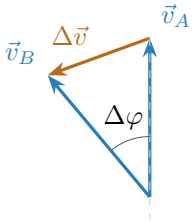
3 / SALIR DE LA RECTA

¿Qué cambia si la aceleración es perpendicular?

Ahora la fuerza resultante apunta de lado respecto a la velocidad. Como $\Delta\vec{v} \simeq \vec{a}\,\Delta t$ en un intervalo muy pequeño, **la velocidad cambia hacia el lado de la fuerza**: su dirección gira.



Si la aceleración apunta siempre a O, la tangente va cambiando.



Trasladamos las velocidades a un origen común para restarlas.

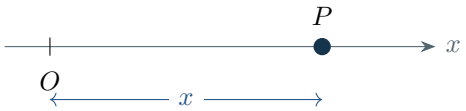
En el ejemplo circular las velocidades tienen igual módulo. La diferencia $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ une las puntas de los vectores. Para un intervalo finito apunta hacia el interior; al tomar el límite temporal se obtiene la aceleración instantánea radial.

4 / UNA COORDENADA SOBRE UNA CURVA

Una circunferencia también tiene un grado de libertad

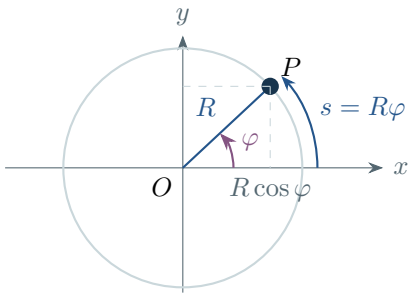
En una recta conocida, basta dar x para localizar el cuerpo. En una circunferencia de **centro y radio conocidos**, basta dar el ángulo φ. Las posiciones posibles siguen formando una línea, ahora curva.

Recta: una coordenada x



Fijado el origen, x determina el único punto permitido en la recta.

Circunferencia: una coordenada φ



Fijados O, R y la referencia angular, φ determina el punto en la curva.

Dos coordenadas cartesianas, una sola variable independiente

En el plano necesitamos escribir dos componentes, pero están ligadas:

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi, \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

Conocer $\varphi(t)$ basta para conocer ambas. **El movimiento está contenido en un plano, pero sobre una circunferencia fija tiene un solo grado de libertad.** Esto no elimina las distintas direcciones de sus vectores velocidad y aceleración.

De la posición angular a la rapidez

Midiendo φ en radianes y tomando el sentido antihorario como positivo,

$$s = R\varphi, \qquad \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}, \qquad \boxed{v = R|\omega|}.$$

s es una coordenada de arco orientada. Para contar vueltas se deja crecer φ más allá de 2π; los ángulos que difieren en 2π localizan el mismo punto.

En el movimiento circular uniforme (MCU), ω es constante: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$. Los ángulos y los arcos recorridos en tiempos iguales también son iguales.

El período T es el tiempo de una vuelta y la frecuencia es $f = 1/T$:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi R}{v}, \qquad v = 2\pi R f.$$

5 / ACELERACIÓN HACIA EL CENTRO

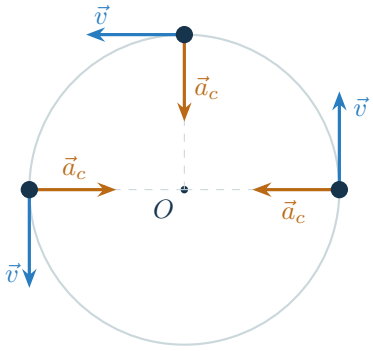
La aceleración centrípeta

En una trayectoria circular de radio R, la dirección de la velocidad cambia continuamente. La aceleración que produce ese cambio de dirección se llama **aceleración centrípeta**: apunta radialmente hacia el centro y es perpendicular a la velocidad.

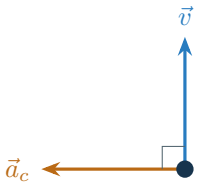
Su módulo viene dado directamente por

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{R} = R\omega^2}.$$

Aquí v es la rapidez, R el radio de la trayectoria y ω la velocidad angular. La unidad de a_c es $\mathrm{m\,s^{-2}}$.



La velocidad es tangente.
La aceleración centrípeta apunta a O.



La dirección radial y la tangente
son siempre perpendiculares.

Se muestran tres posiciones de un MCU: la rapidez y el módulo de la aceleración son constantes, pero ambos vectores cambian de dirección. Las flechas de velocidad y aceleración tienen escalas independientes.

La dirección y el sentido también forman parte del resultado

Si $\vec{u}_r$ es el vector unitario hacia el centro, la expresión vectorial es

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{v^2}{R}\vec{u}_r}.$$

La fórmula del módulo $a_c = v^2/R$ también es válida cuando cambia la rapidez: sigue describiendo la **componente radial hacia dentro**. En ese caso puede existir además una componente tangencial, que se analiza en el apartado siguiente.

En el MCU hay aceleración aunque la rapidez sea constante: la velocidad cambia porque cambia su dirección.

Cómo depende de la rapidez y del radio

Si la rapidez se duplica manteniendo R, la aceleración centrípeta se multiplica por cuatro. Si el radio se duplica manteniendo v, se reduce a la mitad.

6 / DOS DIRECCIONES, DOS EFECTOS

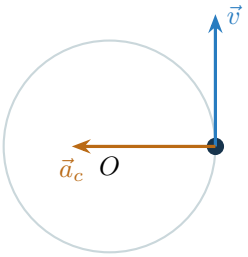
La componente radial curva; la tangencial cambia la rapidez

Sobre una circunferencia, y en un tramo con $v > 0$, elegimos la tangente en el sentido de la velocidad ($\vec{u}_v$) y la radial hacia el centro ($\vec{u}_r$):

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_v + \frac{v^2}{R}\vec{u}_r}.$$

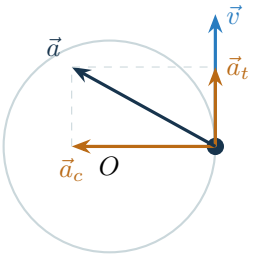
Son **dos direcciones de los vectores en cada punto**, aunque la posición sobre la trayectoria se describa con una sola coordenada.

Rapidez constante



$a_t = 0$
$\vec{a} = \vec{a}_c$

Rapidez creciente



$a_t > 0$
$|\vec{a}| = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$

En el segundo dibujo, $\vec{a}_t$ y $\vec{v}$ son colineales y tienen escalas independientes. Si la rapidez disminuye, $\vec{a}_t$ apunta en sentido opuesto a $\vec{v}$; la componente centrípeta sigue apuntando al centro.

Aplicar la segunda ley de Newton por componentes

Con el sentido radial positivo hacia dentro,

$$\boxed{\sum F_r = m\frac{v^2}{R}}, \qquad \boxed{\sum F_t = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}.$$

En este documento, $\vec{u}_r$ apunta hacia el centro y $\sum F_r$ es la componente de la fuerza resultante en ese sentido.

«Centrípeta» describe el papel de la resultante radial de las fuerzas reales. Puede ser una fuerza completa, una componente o la suma de varias componentes.

En cada diagrama se dibujan las interacciones que existen: tensión, gravedad, normal, rozamiento… El valor mv^2/R se escribe al otro lado de la ecuación radial; añadir una fuerza independiente con ese nombre duplicaría la contribución.

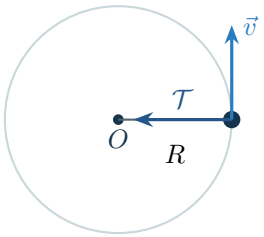
Para resolver cada situación: dibuja las fuerzas reales; marca la dirección hacia el centro; proyecta cada fuerza; impón $\sum F_r = mv^2/R$. Después analiza el balance tangencial y, si procede, el equilibrio perpendicular al plano del movimiento.

7 / CUANDO UNA FUERZA ENTERA ES RADIAL

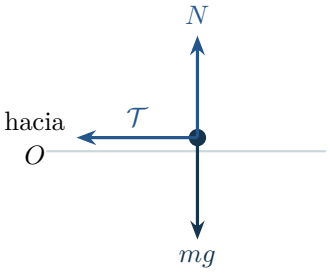
La tensión mantiene el giro sobre una mesa

Una cuerda horizontal une el cuerpo a un punto fijo. La mesa es horizontal y se desprecia el rozamiento. La tensión $\mathcal{T}$ apunta al centro; la normal N y el peso mg se equilibran verticalmente.

Vista superior



Fuerzas en un corte vertical



$$N - mg = 0, \qquad \boxed{\mathcal{T} = \frac{mv^2}{R}}.$$

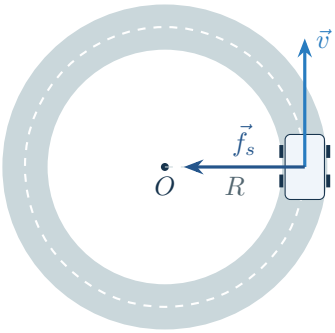
La tensión es perpendicular a la velocidad. Sin fuerza tangencial, la rapidez permanece constante. Por ejemplo, para $m = 0{,}50\,\text{kg}$, $R = 2{,}0\,\text{m}$ y $v = 2{,}0\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, se necesita $\mathcal{T} = 1{,}0\,\text{N}$.

8 / UN COCHE EN UNA CURVA HORIZONTAL

El rozamiento estático proporciona la fuerza radial

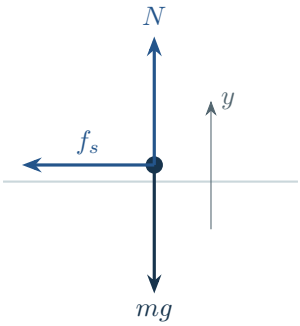
Un coche toma una curva plana de radio R a rapidez constante. Suponemos que no derrapa y que no hay otras fuerzas horizontales relevantes. El rozamiento estático del suelo sobre los neumáticos apunta hacia el centro de la curva.

Vista superior



El rozamiento desvía el coche hacia el interior de la curva.

Diagrama de fuerzas



La vertical está equilibrada. La horizontal apunta a O.

Primero, el equilibrio vertical; después, el balance radial

$$\underbrace{N - mg = 0}_{\text{vertical}} \quad\Longrightarrow\quad N = mg, \qquad \underbrace{f_s = \frac{mv^2}{R}}_{\text{hacia el centro}}.$$

El rozamiento estático se ajusta al valor necesario hasta alcanzar su máximo:

$$f_s \le \mu_s N = \mu_s mg.$$

Por tanto, para tomar la curva sin deslizar,

$$\frac{mv^2}{R} \le \mu_s mg \quad\Longrightarrow\quad \boxed{v \le v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_s g R}}.$$

El rozamiento estático no vale siempre $\mu_s N$. Ese es su valor máximo; en una curva más lenta basta un valor menor.

Un ejemplo y una consecuencia

Para $R = 50\,\text{m}$, $\mu_s = 0{,}40$ y $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$,

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{0{,}40 \cdot 9{,}81 \cdot 50} \simeq 14\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \simeq 50\,\text{km}\,\text{h}^{-1}.$$

Si el coche frena mientras gira, el rozamiento debe aportar también una componente tangencial. El límite $|\vec{f}_s| \le \mu_s N$ se aplica entonces a la **fuerza de rozamiento total**, y no por separado a cada componente.

Aquí se estudia el giro a rapidez constante. Si el agarre no alcanza el valor radial necesario, el coche deja de seguir la circunferencia prevista.

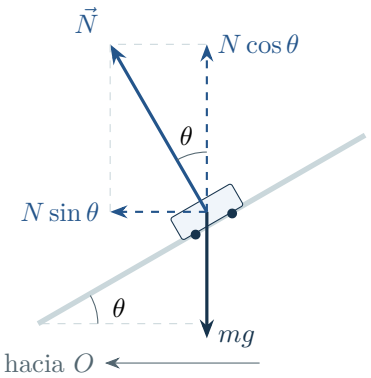
9 / CUANDO SOLO UNA COMPONENTE ES RADIAL

Peralte y péndulo cónico: separar horizontal y vertical

En estos dos ejemplos la trayectoria es una circunferencia horizontal. La aceleración vertical es nula: una componente de la fuerza equilibra el peso y otra produce la aceleración hacia el centro.

9.1. Curva peraltada

La carretera forma un ángulo θ con la horizontal. Se desprecia el rozamiento. La normal N es perpendicular a la superficie.



La normal se inclina θ respecto a la vertical. Por tanto,

$$N\cos\theta = mg,$$
$$N\sin\theta = \frac{mv^2}{R}.$$

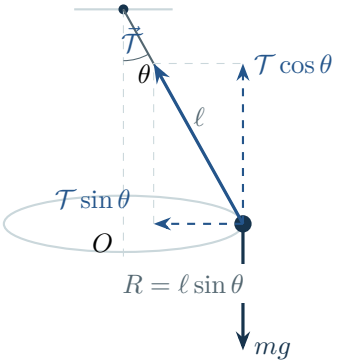
Al dividir ambas ecuaciones,

$$\boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}}, \qquad v = \sqrt{Rg\tan\theta}.$$

Para un radio y un peralte dados, esta es la rapidez que permite tomar la curva **sin rozamiento**. La dirección centrípeta es horizontal hacia el centro de la curva. No coincide con la dirección inclinada de la carretera.

9.2. Péndulo cónico

Una masa gira con una cuerda de longitud ℓ, que forma un ángulo θ con la vertical. La tensión $\mathcal{T}$ apunta al soporte.



El centro de giro está bajo el soporte, a la misma altura que la masa:

$$\mathcal{T}\cos\theta = mg,$$
$$\mathcal{T}\sin\theta = \frac{mv^2}{R}.$$

Al dividir ambas ecuaciones,

$$\boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}}, \qquad R = \ell\sin\theta.$$

La tensión completa apunta al soporte; solo su **componente horizontal** apunta al centro de la circunferencia.

Para el giro estacionario, $\omega^2 = g/(\ell\cos\theta)$. La cuerda barre la superficie de un cono, de donde procede el nombre.

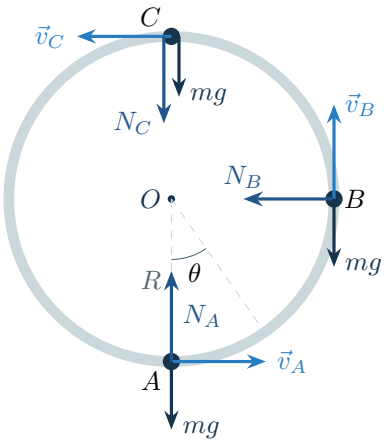
Líneas continuas: fuerzas reales. Flechas discontinuas: componentes de una de esas fuerzas. Se muestran para proyectar la fuerza, no para añadir nuevas interacciones. Ambos dibujos representan un corte radial y vertical; la circunferencia horizontal del péndulo aparece en perspectiva.

Una trayectoria horizontal no exige que todas las fuerzas sean horizontales. Exige que su suma vertical sea cero y su suma radial sea mv^2/R.

10 / UN LAZO VERTICAL

La contribución radial de una fuerza depende de la posición

Un carrito recorre el interior de una pista circular vertical de radio R. Se desprecia el rozamiento y se lo modela como una partícula: las fuerzas son el peso mg y la normal N de la pista, dirigida hacia el centro mientras hay contacto.



Abajo, A: hacia arriba.

$$N_A - mg = \frac{mv_A^2}{R}$$

Lateral, B: hacia la izquierda.

$$N_B = \frac{mv_B^2}{R}$$

El peso es tangencial y frena el ascenso.

Arriba, C: hacia abajo.

$$N_C + mg = \frac{mv_C^2}{R}$$

Las flechas de fuerza son esquemáticas; los valores de la normal cambian a lo largo del giro. En C, las flechas paralelas se han desplazado ligeramente para distinguirlas. La velocidad se dibuja con una escala independiente.

El peso puede contribuir radial y tangencialmente

Si θ se mide desde la vertical inferior en el sentido del ascenso por el lado derecho, las proyecciones dan

$$\boxed{N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}}, \qquad \boxed{-mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}.$$

En el ascenso, la rapidez disminuye y parte de la energía cinética se transforma en energía potencial gravitatoria. Mientras solo la gravedad realiza trabajo,

$$E_c + mgy = \text{constante}.$$

La normal es perpendicular al movimiento y no realiza trabajo.

La condición de contacto limita el movimiento circular

La pista puede empujar, pero no tirar: $N \geq 0$. En la cima,

$$N_C = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\right) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_C \geq \sqrt{gR}}.$$

Esta es la condición local en la cima. Si el carrito parte del punto inferior sin pérdidas, conservar la energía entre abajo y arriba da el umbral $v_A \geq \sqrt{5gR}$ para completar el lazo manteniendo el contacto. Si N llega a cero antes, la trayectoria circular puede terminar antes de la cima.

11 / CONECTAR LAS IDEAS

Leer un movimiento circular a partir de sus fuerzas

La posición se describe mediante $\varphi(t)$. Para una circunferencia fija usamos dos direcciones que giran con el cuerpo: la tangencial $\vec{u}_v$ y la radial $\vec{u}_r$, dirigida hacia el centro.

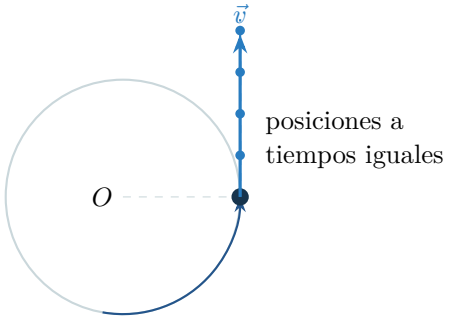
$$\vec{v} = v\vec{u}_v, \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_v + \frac{v^2}{R}\vec{u}_r, \qquad \sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Situación	Contribución hacia el centro	Balance radial
Cuerda horizontal sobre mesa	Tensión completa	$\mathcal{T} = mv^2/R$
Coche en curva plana	Rozamiento estático	$f_s = mv^2/R$
Peralte sin rozamiento	Componente horizontal de la fuerza N	$N\sin\theta = mv^2/R$
Péndulo cónico	Componente horizontal de la tensión	$\mathcal{T}\sin\theta = mv^2/R$
Lazo vertical, abajo	Fuerza normal N menos peso	$N - mg = mv^2/R$
Lazo vertical, arriba	Fuerza normal N más peso	$N + mg = mv^2/R$

En esta tabla, N es la fuerza normal de contacto. Se toma positivo hacia el centro. En el peralte, θ es el ángulo de la carretera con la horizontal; en el péndulo, es el ángulo de la cuerda con la vertical.

¿Qué sucede si desaparece la fuerza que curva la trayectoria?

Si en ese instante la resultante pasa a ser cero, desaparece la aceleración y el cuerpo sigue con su velocidad instantánea: una **recta tangente** a la circunferencia.



Antes de liberar:
la resultante radial cambia la dirección.

Después de liberar:
$\sum \vec{F} = \vec{0}$, $\vec{a} = \vec{0}$ y $\vec{v}$ constante.

Ejemplo: cortar la cuerda en la vista superior de una mesa sin rozamiento. La normal y el peso siguen equilibrándose. Si quedan otras fuerzas sin equilibrar, la trayectoria posterior debe calcularse con ellas.

Para mantener el giro se necesita una resultante radial hacia dentro. Para aumentar o reducir la rapidez se necesita, además, una resultante tangencial.

Material y diagramas de elaboración propia · Pablo Lanz · IES Benjamín de Tudela.