Ley de Gauss campos y potenciales

De la idea de flujo a la deducción paso a paso

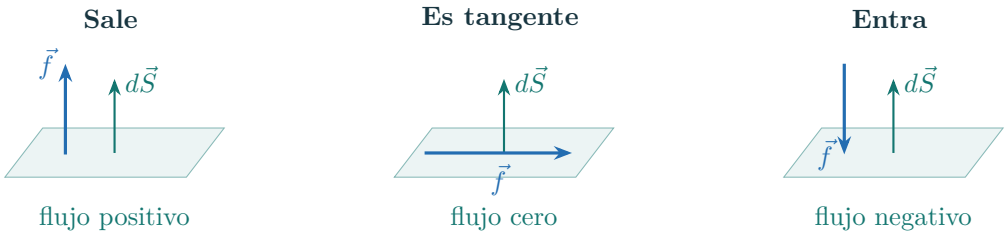
Apuntes conceptuales. Esfera maciza de masa homogénea y esfera conductora con carga positiva, aislada y en equilibrio electrostático. Gravedad newtoniana, vacío y ausencia de campos externos. Al final: corriente estacionaria en un conductor rectilíneo largo.

1 / IDEA CONCEPTUAL

¿Cuánto campo atraviesa una superficie?

Imagina una superficie dividida en pequeñas parcelas. En cada una dibuja una flecha perpendicular: es su **normal**. Para una superficie cerrada elegimos siempre la normal que apunta **hacia fuera**.

El flujo suma la componente del campo que atraviesa cada parcela, multiplicada por su área. Un campo que sale aporta flujo positivo; uno que entra, negativo; uno que discurre tangente a la superficie no la atraviesa y aporta cero.



La contribución de una parcela infinitésima se escribe con un producto escalar:

$$d\Phi = \vec{f} \cdot d\vec{S} = f\, dS \cos\theta, \qquad d\vec{S} = \hat{n}\, dS.$$

Aquí θ es el ángulo entre el campo y la normal, **no el ángulo con la superficie**. La integral acumula esas contribuciones sobre toda la superficie cerrada S:

$$\boxed{\Phi_{\vec{f}}(S) = \int_S \vec{f} \cdot d\vec{S}.}$$

Usaremos un único símbolo $\int_S$; la condición de que S es cerrada se indicará expresamente. Las líneas dibujadas ayudan a visualizar el campo: **la integral no cuenta literalmente líneas**, sino que suma el producto escalar del vector campo con el vector área de cada parcela.

> **El flujo pregunta cuánto campo sale netamente de una superficie cerrada. No exige que una sustancia esté fluyendo ni que una partícula la atraviese.**

No es la circulación. El flujo suma componentes *normales* sobre una *superficie*; la circulación suma componentes *tangenciales* a lo largo de una *curva*. Tampoco flujo cero significa necesariamente campo cero: puede haber entradas y salidas que se compensen.

2 / DE LA LEY AL CÁLCULO

Gauss relaciona el flujo con lo encerrado

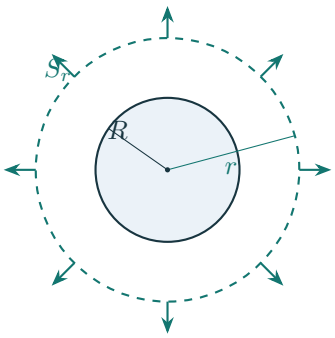
Para una superficie cerrada, las leyes eléctrica y gravitatoria son:

$$\boxed{\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}, \qquad \boxed{\int_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}}.$$

Q_{int} es la carga **neta** encerrada y M_{int} la masa encerrada. El campo de la izquierda es el **campo total** sobre la superficie. Las fuentes exteriores pueden contribuir al campo, aunque no cambien su flujo neto a través de S.

El signo gravitatorio es negativo porque la gravedad de una masa positiva apunta hacia dentro, en sentido opuesto a la normal exterior. Una carga positiva produce flujo eléctrico positivo; una negativa, negativo.

¿Cuándo permite esta ley despejar el campo? Cuando la simetría nos dice su dirección y cómo varía sobre la superficie elegida. La ley de Gauss siempre se cumple, pero **no siempre permite sustituir una integral por campo por área**.



Dos radios distintos
R: radio físico de la esfera, fijo.
r: radio de la superficie gaussiana, que elegimos. Puede ser menor o mayor que R.

La superficie gaussiana no es una pared ni una esfera material. Es una superficie matemática auxiliar. Sus normales apuntan radialmente hacia fuera.

En una distribución con **simetría esférica**, elegimos S_r concéntrica. El campo es radial y su componente radial $f_r(r)$ tiene el mismo valor en toda ella:

$$\vec{f} = f_r(r)\,\hat{r}, \qquad d\vec{S} = \hat{r}\,dS \quad \Longrightarrow \quad \int_{S_r} \vec{f}\cdot d\vec{S} = f_r(r)\int_{S_r} dS = f_r(r)\,4\pi r^2.$$

$\hat{r}$ apunta hacia fuera; f_r puede ser positivo o negativo. **El factor 4π procede del área de la esfera**: en la ley eléctrica el segundo miembro es $Q_{\text{int}}/\varepsilon_0$, no $Q_{\text{int}}/(4\pi\varepsilon_0)$.

> **El orden es: simetría, superficie, fuente encerrada, integral y campo. Para hallar el potencial daremos un paso más: integrar el campo y fijar su referencia.**

3 / ESFERA MACIZA HOMOGÉNEA

Deducir el campo gravitatorio

La esfera tiene masa total M, radio R y densidad de masa constante:

$$\rho_M = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Por simetría, $\vec{g} = g_r(r)\hat{r}$, con $g_r < 0$ para $r > 0$. Elegimos una superficie esférica concéntrica y **partimos de la ley**, antes de introducir el área:

$$\int_{S_r} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}(r) \quad \Longrightarrow \quad g_r(r)\, 4\pi r^2 = -4\pi G M_{\text{int}}(r).$$

Paso 1. Fuera de la esfera: $r \geq R$**.** La superficie encierra toda la masa, así que $M_{\text{int}} = M$. Despejamos:

$$g_r(r) = \frac{-4\pi GM}{4\pi r^2} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \boxed{\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{r}.}$$

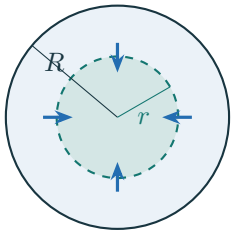
Desde el exterior, la esfera produce el mismo campo que una masa puntual M situada en su centro. Esto **no significa** que podamos utilizar esa expresión dentro.

Paso 2. Dentro de la esfera: $0 < r < R$**.** Solo queda encerrada la masa que ocupa el volumen de radio r:

$$M_{\text{int}}(r) = \rho_M \,\frac{4}{3}\pi r^3 = M\frac{r^3}{R^3}.$$

Volvemos a Gauss con esa masa, no con M:

$$g_r(r)\, 4\pi r^2 = -4\pi GM\frac{r^3}{R^3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{g} = -\frac{GM}{R^3}\, r\,\hat{r}.}$$



La fuente encerrada crece como r^3.
El área crece como r^2. Por eso, dentro, el módulo del campo crece como $r^3/r^2 = r$.

La masa exterior a S_r no aporta campo neto en su interior por la simetría esférica. Es una cancelación de contribuciones, no la ausencia de esa masa.

Paso 3. Comprobar los extremos. En el centro $\vec{g}(0) = \vec{0}$ por simetría; en $r = R$ ambas expresiones dan $g_r = -GM/R^2$. El campo es continuo y su módulo es máximo en la superficie: crece linealmente desde el centro y después disminuye como $1/r^2$.

4 / DEL CAMPO A LA ALTURA

Deducir el potencial gravitatorio

El potencial gravitatorio es energía potencial por unidad de masa: para una masa de prueba m, $E_{\mathrm{p}} = mV_{\mathrm{G}}$. Lo denotamos V_{G}, en J/kg, y elegimos $V_{\mathrm{G}}(\infty) = 0$. La ley de Gauss ha dado el campo; ahora utilizamos la relación entre campo y potencial:

$$g_r(r) = -\frac{dV_{\mathrm{G}}}{dr}, \qquad V_{\mathrm{G}}(r) - V_{\mathrm{G}}(r_0) = -\int_{r_0}^{r} g_r(s)\, ds.$$

La variable s recorre las distancias de la integral; r es el punto en el que queremos obtener el potencial.

Paso 1. Exterior: integrar desde el infinito hasta $r \geq R$.

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{G}}(r) &= -\int_{\infty}^{r} \left(-\frac{GM}{s^2}\right) ds \\ &= GM\left[-\frac{1}{s}\right]_{\infty}^{r} = -\frac{GM}{r}. \end{aligned}$$

En particular, al llegar a la superficie ya conocemos un valor que nos servirá de enlace:

$$\boxed{V_{\mathrm{G}}(R) = -\frac{GM}{R}.}$$

Paso 2. Interior: continuar desde R hasta $r < R$. No reiniciamos el potencial ni elegimos un nuevo cero. Integramos el campo interior a partir del valor de la superficie:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{G}}(r) - V_{\mathrm{G}}(R) &= -\int_{R}^{r} \left(-\frac{GM}{R^3}s\right) ds \\ &= \frac{GM}{R^3}\left[\frac{s^2}{2}\right]_{R}^{r} = \frac{GM}{2R^3}(r^2 - R^2). \end{aligned}$$

Sustituyendo $V_{\mathrm{G}}(R)$ y agrupando:

$$\boxed{V_{\mathrm{G}}(r) = \begin{cases} -\dfrac{GM}{2R^3}\,(3R^2 - r^2), & 0 \leq r \leq R, \\ -\dfrac{GM}{r}, & r \geq R. \end{cases}}$$

Paso 3. Leer el resultado. El potencial es negativo, mínimo en el centro y aumenta al alejarnos hasta tender a cero. Su pendiente es positiva para $r > 0$, de modo que $g_r = -dV_{\mathrm{G}}/dr$ es negativo: el campo apunta hacia el centro.

$$V_{\mathrm{G}}(0) = -\frac{3GM}{2R}, \qquad V_{\mathrm{G}}(R) = -\frac{GM}{R}, \qquad \lim_{r\to\infty} V_{\mathrm{G}}(r) = 0.$$

> **En el centro, el campo es cero, pero el potencial no. Campo cero significa pendiente cero, no altura cero.**

Un atajo que no funciona: dentro no podemos escribir $V_{\mathrm{G}} = -GM_{\mathrm{int}}(r)/r$. Las capas exteriores no producen campo neto en su interior, pero sí contribuyen al potencial. Integrar desde el exterior e imponer continuidad incorpora esas contribuciones.

5 / ESFERA CONDUCTORA CON Q POSITIVA

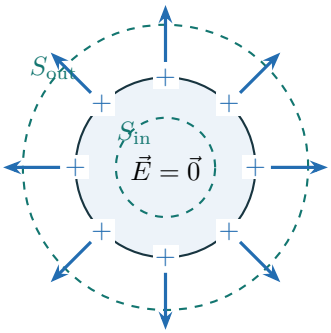
Deducir el campo eléctrico

Consideremos una esfera conductora de radio R con carga neta $Q > 0$, aislada y sin campos externos. En **equilibrio electrostático**, si hubiera campo en el interior del material, las cargas libres se moverían. Por eso el campo interior es cero y el exceso de carga queda en la superficie.

La simetría esférica distribuye esa carga uniformemente en la superficie, no en el volumen:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

No es una esfera aislante con carga volumétrica homogénea: esa sería otra distribución y tendría otro campo interior.



Por dentro: ninguna carga neta encerrada.
Toda la carga en exceso está en $r = R$. Una superficie de radio $r < R$ no la encierra.

Por fuera: toda la carga encerrada.
Una superficie de radio $r > R$ encierra Q. Las normales y el campo apuntan hacia fuera.

Paso 1. Partir de Gauss y utilizar la simetría.

$$\int_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad E_r(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\varepsilon_0}.$$

Paso 2. Interior: $0 < r < R$. $Q_{\text{int}} = 0$, así que

$$E_r(r)\, 4\pi r^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \vec{0}.}$$

También $\vec{E}(0) = \vec{0}$. Aquí el flujo cero permite concluir campo cero porque la simetría ya ha permitido sacar E_r de la integral; no es una conclusión válida para cualquier superficie y cualquier campo.

Paso 3. Exterior: $r > R$. $Q_{\text{int}} = Q$, por lo que

$$E_r(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\,\hat{r}}, \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

El campo exterior es el de una carga puntual Q situada en el centro. En la superficie idealmente cargada distinguimos los límites R^- y R^+; el salto se analizará al comparar las gráficas.

6 / CAMPO CERO, POTENCIAL CONSTANTE

Deducir el potencial eléctrico

El potencial eléctrico es energía potencial por unidad de carga: para una carga de prueba q, $E_{\mathrm{p}} = qV_{\mathrm{E}}$. Lo denotamos V_{E}, en J/C o voltios, y elegimos $V_{\mathrm{E}}(\infty) = 0$. Volvemos a integrar el campo con su signo:

$$E_r(r) = -\frac{dV_{\mathrm{E}}}{dr}, \qquad V_{\mathrm{E}}(r) - V_{\mathrm{E}}(r_0) = -\int_{r_0}^{r} E_r(s)\, ds.$$

Paso 1. Exterior: integrar desde el infinito. Como $Q > 0$, $E_r = kQ/s^2$ es positivo:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{E}}(r) &= -\int_{\infty}^{r} \frac{kQ}{s^2}\, ds \\ &= -kQ\left[-\frac{1}{s}\right]_{\infty}^{r} = \frac{kQ}{r}, \qquad r \geq R. \end{aligned}$$

Al llegar a la superficie:

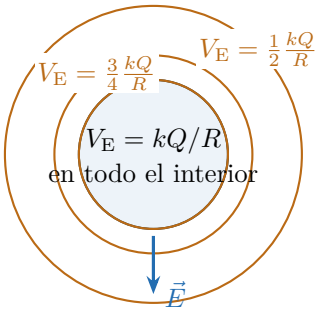
$$\boxed{V_{\mathrm{E}}(R) = \frac{kQ}{R}.}$$

Paso 2. Interior: continuar desde la superficie. Dentro, $E_r = 0$, por tanto

$$V_{\mathrm{E}}(r) - V_{\mathrm{E}}(R) = -\int_{R}^{r} 0\, ds = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_{\mathrm{E}}(r) = V_{\mathrm{E}}(R) = \frac{kQ}{R}.$$

El conductor completo, incluida su superficie, es equipotencial. El resultado es

$$\boxed{V_{\mathrm{E}}(r) = \begin{cases} \dfrac{kQ}{R}, & 0 \leq r \leq R, \\ \dfrac{kQ}{r}, & r \geq R. \end{cases}}$$



Fuera: equipotenciales esféricas.
El campo radial cruza perpendicularmente las superficies de potencial constante.

Dentro: una región entera al mismo potencial.
No hay gradiente ni campo, pero el potencial conserva el valor de la superficie.

Campo interior cero no significa potencial interior cero. Con la referencia en el infinito, todo el conductor está al potencial positivo kQ/R.

Paso 3. Comprobar el signo. Fuera, V_{E} disminuye al aumentar r; su pendiente es negativa y $E_r = -dV_{\mathrm{E}}/dr$ es positivo. Por eso el campo apunta hacia fuera.

7 / LEER CAMPO Y POTENCIAL JUNTOS

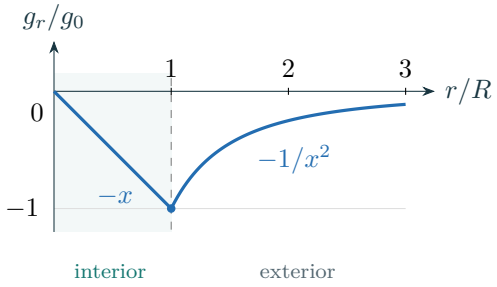
Traducción a gráficas

En ambas columnas, arriba está el **campo radial con signo** y abajo el **potencial**. Usamos escalas propias para comparar las formas:

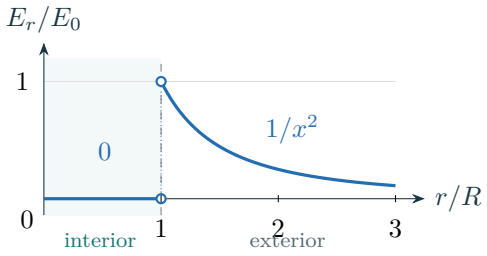
$$x = \frac{r}{R}, \qquad g_0 = \frac{GM}{R^2}, \quad V_{G0} = \frac{GM}{R}, \qquad E_0 = \frac{kQ}{R^2}, \quad V_{E0} = \frac{kQ}{R}.$$

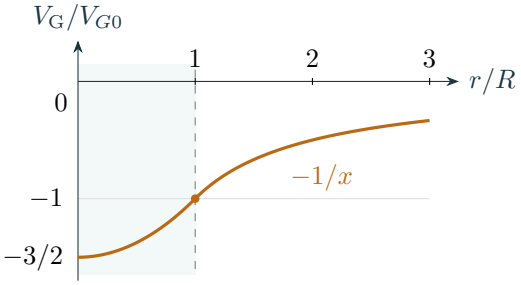
Las cuatro escalas son positivas. Por tanto, la curva de g_r/g_0 está por debajo de cero; no representa el módulo $|\vec{g}|$.

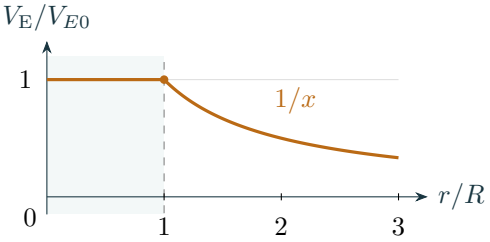
Esfera de masa homogénea



Esfera conductora con $Q > 0$







La zona suave corresponde a $r < R$ y la línea discontinua a $r = R$. En el campo eléctrico, los círculos abiertos distinguen los límites a ambos lados de la capa superficial ideal.

La pendiente del potencial da el campo con signo cambiado:

$$g_r = -\frac{dV_G}{dr}, \qquad E_r = -\frac{dV_E}{dr}.$$

La integral con signo del campo entre dos radios da el descenso de potencial:

$$V_G(b) - V_G(a) = -\int_a^b g_r\, dr, \qquad V_E(b) - V_E(a) = -\int_a^b E_r\, dr.$$

En la superficie, los dos potenciales son continuos. En la esfera de masa también lo es el campo. En el conductor, en cambio, el campo salta:

$$E_r(R^-) = 0, \qquad E_r(R^+) = \frac{kQ}{R^2}, \qquad E_r(R^+) - E_r(R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

El salto de E_r corresponde a un cambio brusco de pendiente de V_E, **no a un salto del potencial**. No estamos comparando solo dos tipos de campo: las distribuciones también son distintas, masa en el volumen frente a carga en la superficie.

8 / GAUSS TAMBIÉN EN MAGNETISMO

Una corriente no produce flujo magnético neto

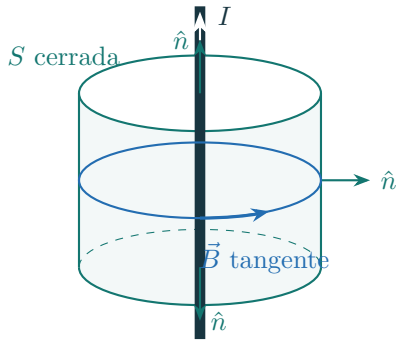
La ley de Gauss para el campo magnético tiene un segundo miembro diferente:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{para toda superficie cerrada } S.$$

En la descripción clásica habitual no hay cargas magnéticas aisladas que actúen como fuentes o sumideros. Las líneas de $\vec{B}$ no empiezan ni terminan en un monopolo: el flujo que sale de una superficie cerrada se compensa con el que entra, si hay cruce.

¿Qué sucede si una corriente atraviesa la superficie? La ley sigue dando cero. La corriente no sustituye a Q_{int} en el segundo miembro de Gauss. Su relación con el campo magnético aparecerá en la *circulación*, mediante Ampère.

Tomemos un conductor cilíndrico rectilíneo muy largo, idealizado como infinito, de radio pequeño pero finito a, con corriente estacionaria I distribuida uniformemente en su sección. Por la simetría, el campo rodea el eje: es **azimutal** (circunferencial), tangente a circunferencias concéntricas. Elegimos una superficie cerrada cilíndrica coaxial, de radio $r > a$.



Pared lateral
La normal es radial. $\vec{B}$ es azimutal: $\vec{B} \cdot \hat{n} = 0$.

Las dos tapas
Sus normales son paralelas al eje. $\vec{B}$ es perpendicular al eje: también $\vec{B} \cdot \hat{n} = 0$.

Perspectiva esquemática: la elipse azul representa una circunferencia horizontal alrededor del conductor. En este caso particular, el campo no atraviesa ninguna parte de la superficie.

Al sumar pared y tapas:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{pared}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{tapas}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 + 0 = 0.$$

Gauss se cumple, pero no determina el módulo de B: la igualdad se reduce a $0 = 0$. Un campo tangente puede ser intenso y seguir teniendo flujo cero.

En otras superficies puede haber flujo entrante y saliente. Gauss asegura que el *balance* sea cero; no exige que cada contribución individual se anule.

9 / LA LEY ADECUADA PARA LA CORRIENTE

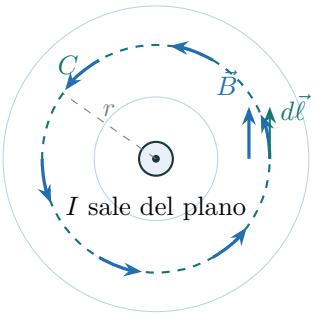
Completar la deducción con Ampère

Para calcular el campo del conductor necesitamos otra relación. En magnetostática, para un **contorno cerrado** C en el vacío:

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}.}$$

Aquí no integramos sobre una superficie cerrada: recorremos una curva. I_{enc} es la corriente neta que atraviesa una superficie *abierta* cuyo borde es C. Su signo y el sentido del recorrido se relacionan con la regla de la mano derecha.

Paso 1. Elegir un contorno circular de radio $r > a$. Con la corriente dirigida hacia ti, tomamos el sentido antihorario. $\vec{B}$ y $d\vec{\ell}$ tienen el mismo sentido y B es constante en el contorno.



El mismo campo, otra integral.
En Gauss, $\vec{B}$ es perpendicular a la normal del cilindro. Aquí es paralelo al avance por la circunferencia.

El círculo es un camino matemático. No es la trayectoria de una carga sometida a una fuerza magnética.

Paso 2. Evaluar la integral y despejar. La corriente enlazada es I:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B(r)\oint_C d\ell = B(r)\,2\pi r = \mu_0 I \quad\Longrightarrow\quad \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > a).}$$

I se toma aquí positivo en el sentido dibujado y B es el módulo. La dirección es tangente a las circunferencias; invertir la corriente invierte el sentido del campo.

¿Y el potencial magnético? Que el flujo de $\vec{B}$ sea cero no implica un potencial escalar global análogo a V_{E} o V_{G}. Una vuelta alrededor del hilo tiene circulación $\mu_0 I \neq 0$; si $\vec{B} = -\nabla V_B$ para un escalar global univaluado en toda la región que rodea el hilo, esa vuelta daría cero. La descripción general utiliza un potencial vector, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

> **Gauss relaciona fuentes con flujo; Ampère relaciona corriente con circulación. El campo eléctrico y el gravitatorio de nuestras esferas se deducen con Gauss y simetría. El del hilo se calcula con Ampère, respetando también Gauss magnético.**

Para ampliar: Feynman, vol. II, cap. 5: aplicaciones de Gauss; vol. II, cap. 4: potencial eléctrico; vol. I, cap. 13: potencial gravitatorio; vol. II, cap. 13: magnetostática. Esquemas y deducciones elaborados para estos apuntes.