Cuerpos en órbita

Física IB.

Índice

1. Momento lineal **2**

2. Componentes de la velocidad **3**

3. Momento angular **5**

4. Momento angular en fuerzas centrales **6**

4.1. Órbitas circulares 6

4.2. Órbitas elípticas (1ª y 2ª Ley de Kepler) 7

5. Energía. Tipos de trayectorias **9**

5.1. Energía potencial efectiva 9

5.2. Tipos de trayectoria 10

1. Momento lineal

Decimos que cuando una partícula masiva posee una velocidad, esta adquiere una magnitud llamada "momento lineal", que es vectorial y derivada, y se define como el producto de la masa y la velocidad de un cuerpo.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Esta magnitud es muy útil cuando hablamos de su **conservación**.

Si el momento se conserva, esto implica que la velocidad no varía, por lo que estamos ante un caso de mru, es decir, un caso que pertenece a las situaciones tratadas en la 1ª ley de Newton. Deducimos entonces que, para que se conserve el momento, la fuerza neta sobre ese cuerpo debe de ser nula.

De aquí sacamos la siguiente conclusión:

Cuando la fuerza que actúa sobre un cuerpo es nula, el momento lineal se conserva.

Sin embargo, si un cuerpo posee una aceleración, es decir, su velocidad varía con el tiempo, el momento no se conserva. En este caso, va cambiando a razón de cómo se modifica la velocidad con el paso del tiempo. Es decir:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

O, expresado de otra manera:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Recordamos que, según la 2ª ley de Newton, cuando sobre un cuerpo se realiza una fuerza neta distinta de 0, este cuerpo experimenta una aceleración, siguiendo la relación: $F = m \cdot a$. Viendo la anterior expresión, podemos generalizar entonces:

La fuerza realizada sobre un cuerpo, equivale a la variación del momento lineal del mismo con respecto al tiempo.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1}$$

2. Componentes de la velocidad

Estamos acostumbrados a observar un espacio cartesiano, en el que se toman como referencia dos ejes perpendiculares en un plano. En base a estos dos ejes, podemos expresar qué dirección toma un vector, como por ejemplo, la velocidad de una partícula. Siempre expresaremos ese vector, como suma de dos vectores perpendiculares, que tengan las mismas direcciones que los dos ejes: $\vec{v} = (\vec{v_x}, \vec{v_y})$.

De esta manera, en la gráfica siguiente podemos expresar la velocidad como $\vec{v} = (3, 1)$, ya que el vector $\vec{v}$ se puede determinar por la suma los vectores: $\vec{v_x} = (3, 0)$ y $\vec{v_y} = (0, 1)$.

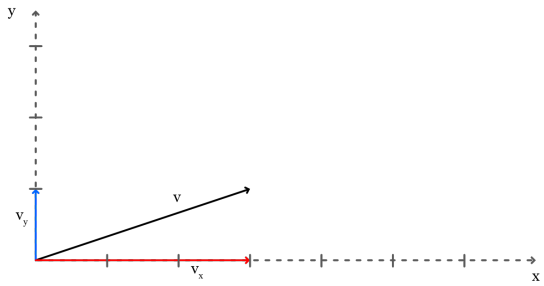


Figura 1: Velocidad en espacio euclídeo

Esto en algunos sistemas puede ser muy útil, pero en otros, puede resultar excesivamente complejo.

Imaginemos el caso en el que un cuerpo está rotando en torno a un centro. En ese caso, si tomamos como referencia los ejes cartesianos mencionados anteriormente, cada momento, va a tener un ángulo con respecto al eje x distinto, y por tanto, aunque el valor de la velocidad permanezca constante, en cada uno de los puntos del recorrido, tendremos que calcular cuales son las componentes x e y de la velocidad. Esto puede resultar tedioso, por lo que podemos cambiar de sistema de referencia.

Una propuesta puede ser tomar siempre como referencia dos ejes. Por una parte, el eje que une el centro con el cuerpo en rotación, que lo llamamos "eje radial". El segundo eje, debe ser siempre perpendicular a este, llamándolo "eje tangencial". Si nos damos cuenta, los ejes no son fijos como en el caso de los ejes cartesianos, sino que van rotando al mismo ritmo que lo hace el cuerpo. De esta manera, definiremos cualquier vector en función de los dos nuevos ejes. Por ejemplo: $\vec{v} = (\vec{v_r}, \vec{v_t})$

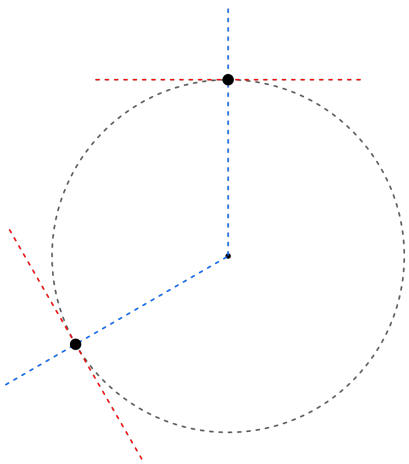


Figura 2: Ejes circulares

Un ejemplo conocido, es el del movimiento circular uniforme (mcu). En este tipo de movimiento, sabemos que la velocidad del cuerpo siempre es tangencial y del mismo valor. Su valor no se ve modificado, ya que tan solo varía el ángulo barrido, gracias a la aceleración centrípeta generada por una fuerza central.

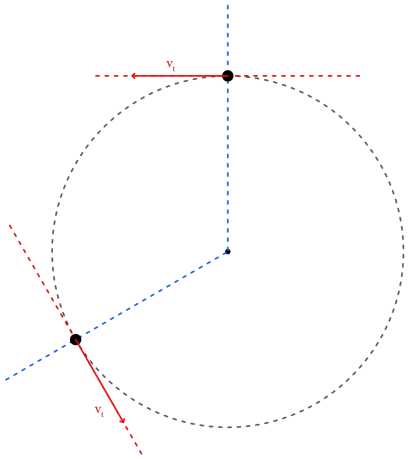


Figura 3: Velocidad tangencial

Si además de velocidad tangencial, nuestro cuerpo tiene una componente radial, obtendremos, como en la gráfica 1, una velocidad resultante de la suma de ambas componentes.

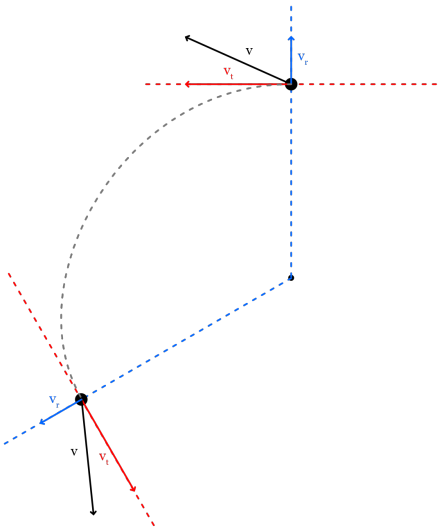


Figura 4: Velocidad tangencial y radial

Conociendo estas componentes de la velocidad, únicamente sabiendo la distancia a la que se encuentra del punto central, podríamos conocer exactamente la posición y la velocidad del cuerpo.
Ejemplo:

$$\vec{v} = (\vec{v_r}, \vec{v_t}) = (1, 3) \tag{2}$$

3. Momento angular

Definimos "Momento angular" como una magnitud vectorial y derivada, que resulta del producto vectorial del vector posición y el vector momento lineal.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{3}$$

Esto solo tiene sentido definirlo cuando la velocidad es tangencial, ya que si la velocidad está compuesta únicamente de componente radial, el vector *posición* siempre tendrá la misma dirección que el vector *momento lineal*, y por lo tanto, su producto vectorial será nulo. Se puede demostrar de la siguiente manera:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot (\vec{v_r}, \vec{v_t})$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v_r} + \vec{r} \times m \cdot \vec{v_t}$$
$$\vec{L} = 0 + \vec{r} \times m \cdot \vec{v_t}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v_t}$$

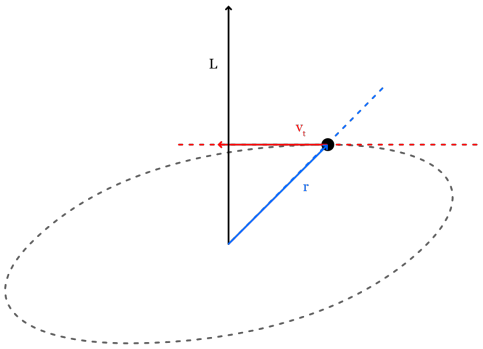


Figura 5: Momento angular

Por tanto, el momento angular será distinto de 0, cuando la velocidad haga rotar un cuerpo alrededor de un punto. Podemos hallar el módulo del momento angular asumiendo que entre los dos vectores siempre va a haber un ángulo de 90^{o}.

$$|L| = r \cdot m \cdot v \cdot \sin\theta$$
$$|L| = m \cdot v_t \cdot r \tag{4}$$

4. Momento angular en fuerzas centrales

Se definen fuerzas centrales, como aquellas que se dirigen siempre hacia el mismo punto en el espacio. Es decir, si nos basamos en el sistema de referencia mencionado en el apartado dos, las fuerzas centrales solo tienen componente radial, y por tanto, son paralelas al vector posición.

Para comprender cómo influyen las fuerzas centrales en el momento angular, vamos a estudiar cómo varía el momento angular con el tiempo de la siguiente manera.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times m \cdot \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Nos damos cuenta de que al realizar el producto vectorial entre la misma magnitud (con la misma dirección), el resultado es nulo, ya que $sin0 = 0$. Por tanto, nos queda únicamente el segundo sumando. En él, podemos aplicar la definición de fuerza con la que concluimos el primer apartado, en la que llegamos a la conclusión con la ecuación (1): $F = \frac{dp}{dt}$. Por ello:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{5}$$

Esta ecuación implica que el momento angular cambiará con el tiempo solo si el producto vectorial de la posición y la fuerza es distinto de 0. Por lo tanto:

Cuando solo existen fuerzas centrales sobre un cuerpo, el momento angular se conserva:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \tag{6}$$

4.1. Órbitas circulares

El caso de las órbitas circulares es equivalente a un cuerpo realizando un movimiento circular uniforme. En él, la velocidad tiene una componente *tangencial* perpendicular a la fuerza de atracción, que siempre se dirige hacia el centro del círculo descrito. Es decir, la fuerza tiene componente únicamente *radial*. A este tipo de fuerzas también les conocemos como **fuerzas centrípetas**. Como consecuencia, generará en el cuerpo una aceleración centrípeta con la misma dirección, que únicamente afectará a la dirección de la velocidad, no a su módulo.

$$\vec{F_c} \parallel \vec{r} \longrightarrow \vec{a_c} \perp \vec{v_t}$$

Si valoramos el momento angular, obtenemos la relación obtenida en el apartado anterior, ya que al ser perpendicular al radio, $\theta = 90^{o}$. Es decir, obtenemos que $|L| = m \cdot v \cdot r$. Por lo tanto, sabemos que en todo el recorrido, se conserva dicha cantidad:

$$m \cdot v \cdot r = cte \tag{7}$$

4.2. Órbitas elípticas (1ª y 2ª Ley de Kepler)

Primera ley de Kepler:

> Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.

En las órbitas elípticas, la velocidad no tiene únicamente componente *tangencial*, sino que en algunos puntos, existe además una componente que tiene la misma dirección que el vector posición, o componente *radial*. Esto implica que la velocidad no va a ser la misma en todo el recorrido. Además, por la trayectoria, sabemos también que la distancia al punto central ($\vec{r}$) tampoco es constante. Como vemos en la siguiente figura, el ángulo entre los vectores posición y velocidad no es 90^{o} en todos los puntos. Ni siquiera es constante. ¿Qué es lo que se conserva entonces? Basándonos en la conclusión llegada al comienzo del

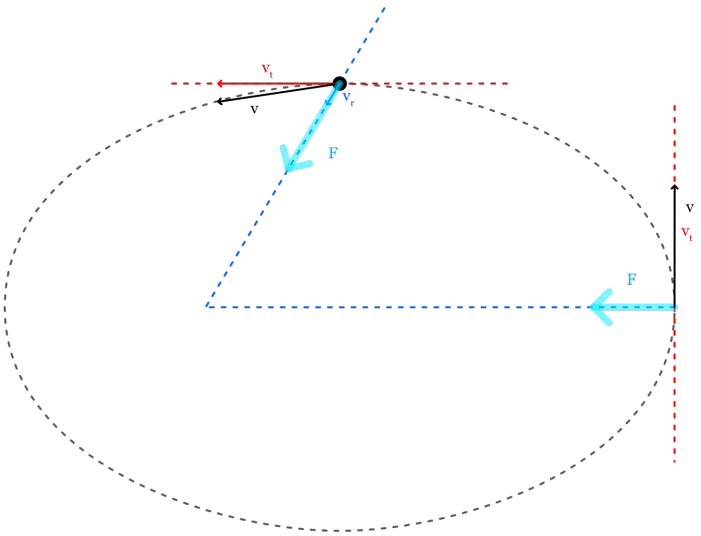


Figura 6: Fuerzas centrales en trayectoria elíptica

apartado con la ecuación (6), sabemos que si únicamente existen fuerzas centrales, el momento angular no varía con el tiempo, y por tanto, su módulo va a ser siempre el mismo, independientemente de la posición en la que se encuentre el cuerpo en rotación. Por tanto:

$$|L| = r \cdot m \cdot v \cdot \sin\theta = cte \tag{8}$$

Ya que la expresión anterior se va a conservar:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ r_1 \cdot m \cdot v_1 \cdot \sin\theta_1 &= r_2 \cdot m \cdot v_2 \cdot \sin\theta_2 \\ r_1 \cdot v_1 \cdot \sin\theta_1 &= r_2 \cdot v_2 \cdot \sin\theta_2 \end{aligned}$$

En el caso de los dos puntos alineados con los focos de la elipse, en los que el ángulo entre el vector posición y el vector velocidad es un ángulo recto, se cumple que:

$$r_1 \cdot v_1 = r_2 \cdot v_2 \tag{9}$$

Velocidad, que por otra parte, podemos relacionar con la velocidad angular, sabiendo que $v = r \cdot \omega$. Por tanto, la expresión anterior, se puede escribir:

$$r_1^2 \cdot \omega_1 = r_2^2 \cdot \omega_2 \tag{10}$$

Esto demuestra la **segunda ley de Kepler**, que dice:

> Los planetas se mueven con velocidad areolar constante. Es decir, el vector posición r de cada planeta con respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

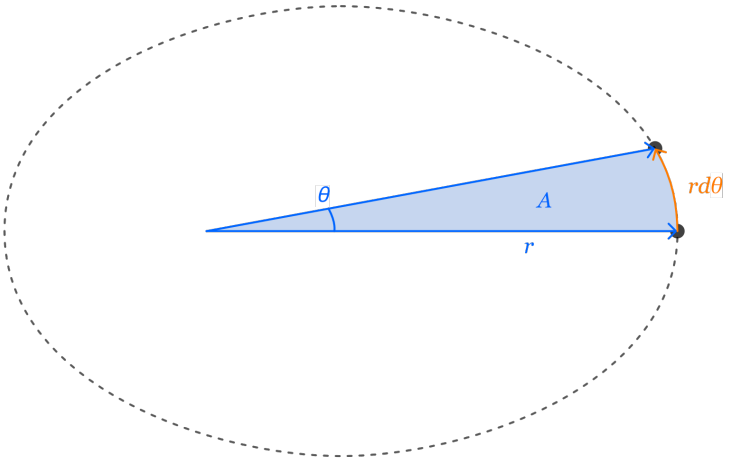


Figura 7: Área barrida por el vector posición

El reto ahora es comprobar que esto es cierto. Para ello, vamos a realizar el área que barre el vector posición en la elipse que se marca en la siguiente figura:

Para ello, en ángulos θ pequeños, podemos aproximar al área de un triángulo, en el que la base es r y la altura es el arco recorrido $r\sin\theta \approx r\theta$. Sabiendo que el área de un triángulo es $A = b \cdot h/2$:

$$A = \frac{r \cdot r\theta}{2}$$

$$A = \frac{r^2 \cdot \theta}{2}$$

Lo que dice la 2ª ley de Kepler, es que el vector *posición* recorre el mismo área en el mismo tiempo, es decir, que la velocidad a la que barre áreas es la misma. Por ello, la derivada del área con respecto al tiempo debe ser constante:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2} \cdot \theta\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(r^2)}{dt} \cdot \theta + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 0 + \frac{r^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega \tag{11}$$

Aclaración: Para la demostración se tiene en cuenta que en una variación infinitesimal de área, la variación de la distancia del planeta al foco se considera despreciable.

Sabemos por la expresión (10), que $r^2 \cdot \omega$ es constante en el tiempo, por lo que $\frac{1}{2}r^2\omega$ también lo será.

Queda demostrado que si el momento angular se conserva, la velocidad areolar permanecerá constante.

5. Energía. Tipos de trayectorias

Es el turno de examinar la energía de un cuerpo en rotación. Conocemos que la energía mecánica de un cuerpo en movimiento, es el resultado de la suma de la energía cinética y la potencial.

$$E_M = E_c + E_p \tag{12}$$

Ahora, vamos a aplicar los conocimientos del campo gravitatorio y los conceptos abordados en este documento para expresar la misma ecuación. En primer lugar, la velocidad es un vector formado por dos componentes, la componente *radial* y la componente *tangencial*. En el caso de la energía potencial, sustituiremos la expresión para un campo gravitatorio a distancia.

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

La velocidad, que es la suma de las dos componentes (radial y tangencial), podemos expresarla según Pitágoras como: $v^2 = v_r^2 + v_t^2$.

$$E_M = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_t^2 - G\frac{Mm}{r} \tag{13}$$

Con el objetivo de llegar a una expresión con únicamente *componentes radiales*, podemos expresar la velocidad tangencial en función del momento angular teniendo en cuenta la expresión (4). Por ello:

$$L^2 = r^2 \cdot m^2 \cdot v_t^2$$
$$v_t^2 = \frac{L^2}{m^2 \cdot r^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (13), nos queda:

$$E_M = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} \tag{14}$$

Esta es una manera de expresar la energía mecánica de vital importancia, ya que hemos llegado a una expresión que depende únicamente de coordenadas radiales, tanto del vector *posición*, como del vector *velocidad radial*.

Además, los términos en azul, solo son dependientes del vector *posición*, el resto es constante. Los términos de energía que dependen solo de la posición del cuerpo se asocian a la energía potencial. La suma de estos dos términos la llamaremos entonces **energía potencial efectiva**.

5.1. Energía potencial efectiva

$$E_{p,ef} = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} \tag{15}$$

Ya que esta expresión depende únicamente de la posición, vamos a representarlo en una gráfica separando cada uno de los términos que aparecen en ella.

En primer lugar, el término debido a la rotación del cuerpo $\left(\frac{L^2}{2mr^2}\right)$. Todas las magnitudes son positivas, por lo que el término será siempre mayor que 0 y además, decae de manera cuadrática, ya que depende de $1/r^2$. Por tanto, cuando la E_p sea aproximadamente 0, r tenderá a ∞.

En segundo lugar, el término relacionado con la energía potencial conocido $\left(-G\frac{Mm}{r}\right)$. Este término es siempre menor que 0 y es proporcional a $1/r$. Consecuentemente, cuando la E_p sea aproximadamente 0, r también tenderá a ∞.

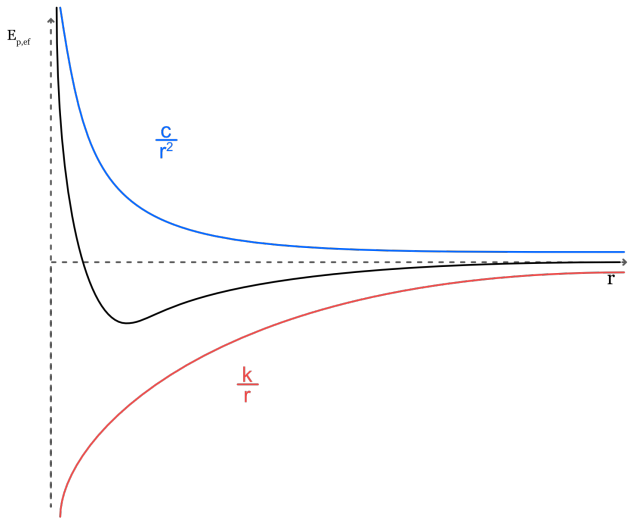


Figura 8: Energía potencial efectiva / r

En la gráfica se observa que, como resultado de la suma de ambos términos, se produce una función que desciende hacia un mínimo y a partir de ahí se aproxima al 0 cuando la posición tiende a ∞.

5.2. Tipos de trayectoria

Finalizamos este apartado haciendo referencia al tipo de trayectoria que puede tener un cuerpo en rotación con respecto de otro. Esta trayectoria, en concreto, depende de la cantidad de energía de la que disponga el cuerpo en rotación y su relación con la energía potencial efectiva. Vamos a encontrar 4 casos diferenciados, que se exponen a continuación:

1. *E* igual al mínimo de Energía potencial efectiva.
   En este caso, si dibujamos en la gráfica una recta con la cantidad de energía que dispone el cuerpo, vemos que se forma una intersección con la función de la energía potencial efectiva en un punto. Esto hace, que ese punto de la gráfica coincida con el eje x (r) con una distancia concreta. La trayectoria cuya distancia es siempre la misma es un círculo, por lo que en estos casos, la trayectoria es **circular**.

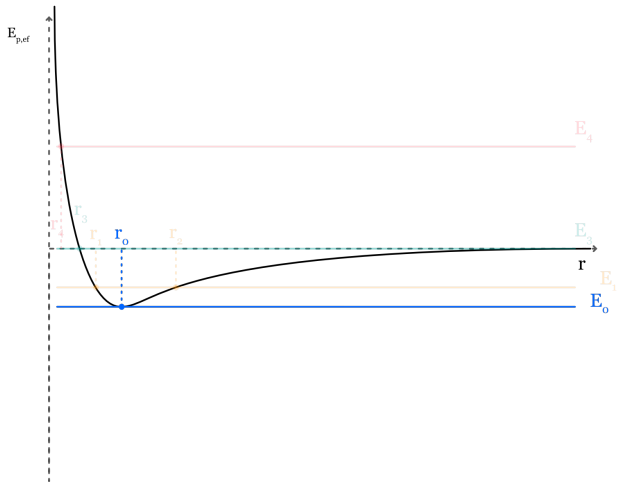


Figura 9: Trayectoria circular

2. E entre E_0 y $E = 0$. Si la energía es menor de 0, pero mayor que el mínimo de energía potencial, podemos ver que la intersección entre las dos funciones en la gráfica son dos puntos. Estos dos puntos coinciden en el eje x con dos distancias, que interpretamos como una distancia menor, y una distancia mayor. Esto, inequívocamente, hace referencia a una trayectoria con una distancia variante, que tiene un mínimo y un máximo. Es decir, una trayectoria **elíptica**.

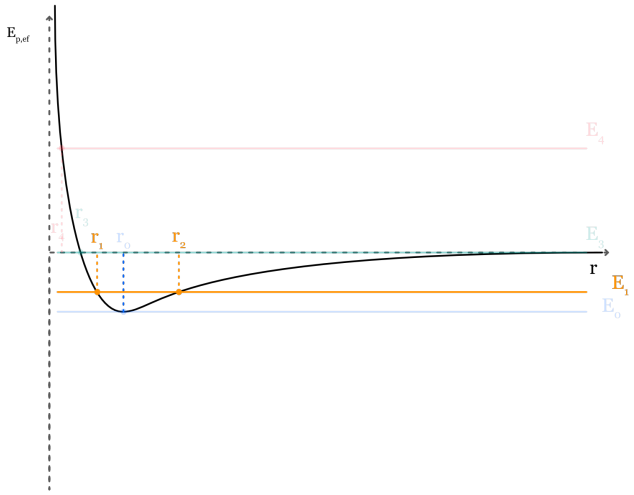


Figura 10: Trayectoria elíptica

3. $E = 0$. Si la energía es igual a 0 volvemos a una intersección entre las dos funciones puntual. Sin embargo, en este caso, esa distancia asociada en el eje x no corresponde a un mínimo en la energía potencial. Esto hace que esa trayectoria sea **parabólica**.

4. $E > 0$. En los casos en que la energía es positiva, la trayectoria únicamente puede ser **hiperbólica**.

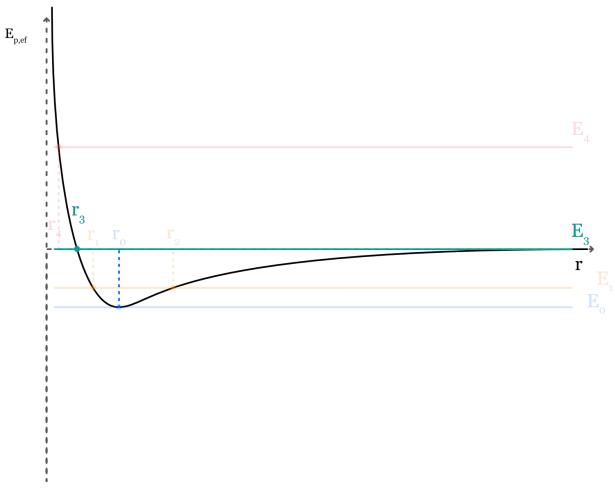


Figura 11: Trayectoria parabólica

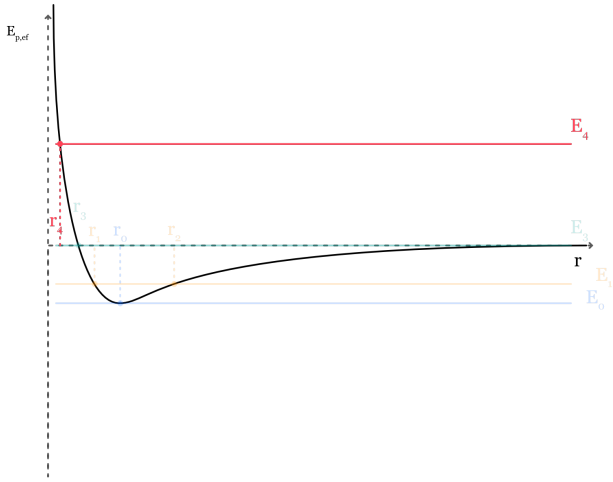


Figura 12: Trayectoria hiperbólica